Cahier d'exercices

PSI** 2018/19

Ce document de travail est structuré conformément à la progression du cours. Il contient des exercices qui couvrent l'ensemble du programme officiel de PSI. Beaucoup d'entre eux sont issus des concours ces dernières années ; certains requièrent un temps conséquent de recherche active. Il n'y a volontairement pas d'indicateur de difficulté ou de provenance.

Si vous détectez une erreur d'énoncé, merci d'avertir vos camarades, de la signaler en classe ou à l'adresse

roger.mansuy@gmail.com

Voici quelques consignes génériques :

▹ Avant d'aborder un exercice, on vérifie que l'on est au point sur le cours : les énoncés avec l'ensemble de leurs hypothèses, les méthodes pour établir les différentes propriétés.

▹ Avant de quitter un exercice, on dresse un bilan de nos tentatives (fructueuses ou non) afin de gagner en expérience pour les prochains exercices.

Roger Mansuy

Les minutes, mortel folâtre, sont des gangues
Qu'il ne faut pas lâcher sans en extraire l'or !

Charles Baudelaire, *Fleurs du Mal*

⋆ ⋆ ⋆

Il n'y a qu'une façon d'échouer, c'est d'abandonner avant d'avoir réussi.

attribué à George Clemenceau

⋆ ⋆ ⋆

Don't just read it ; fight it ! Ask your own question, look for your own examples, discover your own proofs. Is the hypothesis necessary ? Is the converse true ? What happens in the classical special case ? What about the degenerate cases ? Where does the proof use the hypothesis ?

Paul Halmos, *How to be a Mathematician*

⋆ ⋆ ⋆

Wir müssen wissen, wir werden wissen.

David Hilbert

1 – Révision d'algèbre linéaire

Exercice 1.1

Considérons trois bases de $\mathbb{R}^n$: $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_n)$, *et* $(g_1, \dots, g_n)$.
Soit i, $j \in [\![1, n]\!]$ *tels que* $i + j \leq n + 1$. *Posons*

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{Vect}(e_i, \dots, e_n), \\ F &= \operatorname{Vect}(f_j, \dots, f_n), \\ G &= \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_{i+j-1}). \end{aligned}$$

Montrer que $E \cap F \cap G$ *n'est pas le sous-espace nul.*

Exercice 1.2

Soit V_1,..., V_p *des sous-espaces d'un espace vectoriel* E *de dimension finie tels que*

$$\sum_{k=1}^{p} \dim V_k > (p-1) \dim E.$$

Montrer que $\bigcap\limits_{k=1}^{p} V_k \neq \{0_E\}$.

Exercice 1.3

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ *une famille libre de fonctions dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que la famille* $(f_1', \dots, f_n')$ *est de rang au moins* $n - 1$.

Exercice 1.4

Soit E *un espace vectoriel,* F *un sous-espace de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que*

$$\dim u(F) \geq \dim F - \dim \operatorname{Ker} u.$$

Exercice 1.5

Soit E, F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Déterminer*

$$\dim\{v \in \mathcal{L}(E, F),\ v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E,F)}\}.$$

Exercice 1.6

Soit H_1, ..., H_p *des hyperplans d'un espace vectoriel* E *de dimension* n. *Montrer que*

$$\dim \bigcap_{k=1}^{p} H_k \geq n - p.$$

Peut-on avoir une inégalité stricte pour des hyperplans deux à deux distincts ?

Exercice 1.7

Soit E *un espace vectoriel de dimension* n *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *de dimension* p. *Montrer que* F *est l'intersection de* $n - p$ *hyperplans.*

Exercice 1.8

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie,* φ *une forme linéaire non nulle sur* E *et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer que* $\operatorname{Ker} \varphi$ *est stable par* f *si, et seulement si, il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

Exercice 1.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Discuter la dimension du sous-espace* $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(AM) = 0\}$.

Exercice 1.10

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie, un endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(E)$ *nilpotent d'indice* p *(c'est-à-dire tel que* $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ *et* $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$*). Posons*

$$\Phi : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u.$$

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$\Phi^n : v \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^k.$$
2. *Montrer que* Φ *est nilpotente et majorer son indice de nilpotence.*
3. *Montrer que, pour tout* $a \in \mathcal{L}(E)$, *il existe* $b \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $a \circ b \circ a = a$.
4. *En déduire l'indice de nilpotence de* Φ.

Exercice 1.11

Soit E *un espace vectoriel de dimension* n, *un endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(E)$ *tel qu'il existe une base de* E *de la forme* $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ *avec* $x_0 \in E$. *Montrer qu'il existe des scalaires* $(a_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ *tels que*

$$u^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0.$$

Exercice 1.12

Soit u *et* v *deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que*

$$\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$

puis que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v)$.

Exercice 1.13

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. *Préciser le noyau et l'image de l'application linéaire induite par v entre les espaces* $\mathrm{Im}\,(u)$ *et* E.
2. *Montrer que*
$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v \circ u) + \dim \mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\ \ u.$$
3. *En déduire que*
$$\dim \mathrm{Ker}\, v \circ u \leq \dim \mathrm{Ker}\, v + \dim \mathrm{Ker}\, u$$
et en particulier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\dim \mathrm{Ker}\, u^k \leq k. \dim \mathrm{Ker}\, u,$$
$$\mathrm{rg}(u^k) \geq k. \mathrm{rg}(u) - n(k-1).$$

Exercice 1.14

Soit p et q deux projections sur le même sous-espace G (mais de directions différentes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est une projection sur G.

Exercice 1.15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E qui commutent. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q.$$

Exercice 1.16

Soit E un espace vectoriel de dimension impaire, p et q deux projecteurs de E. Montrer qu'il existe une droite à la fois stable par p et q.
Indication : on pourra déterminer les droites stables par un projecteur.

Exercice 1.17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. *Montrer que, pour tout projecteur p de E,* $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^m = \mathrm{Id}_E$.
2. *Montrer que l'endomorphisme*
$$p = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$$
est un projecteur de E.
3. *En déduire que*
$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{tr}(u^k) = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E).$$

Exercice 1.18

Calculer l'inverse de la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 1.19

Déterminer les réels λ tels qu'il existe une matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^{\mathrm{T}} = \lambda A$.

Exercice 1.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M + M^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}(M)A$.

Exercice 1.21

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$ et $\mathrm{I}_n \in \mathrm{Vect}(M, M^{\mathrm{T}})$.

Exercice 1.22

Considérons la matrice
$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \alpha_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
et $\mathcal{C}_A$ l'espace des matrices commutant avec A.

1. *Montrer l'injectivité de l'application linéaire*
$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_A & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ (m_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (m_{i,n})_i \end{array} \right.$$
2. *En déduire que, pour tout $M \in \mathcal{C}_A$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $M = P(A)$.*

Exercice 1.23

Montrer qu'il existe des matrices de rang 1 qui ne sont pas semblables à $E_{1,1}$.

Exercice 1.24

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang k telle que $A^2 = 0_n$. Montrer que A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I}_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 1.25

1. *Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme*

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{cases}$$

2. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de trace nulle.*
   (a) *Montrer que M est semblable à une matrice à diagonale nulle.*
   (b) *Montrer qu'il existe A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = AB - BA$.*

Exercice 1.26

1. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que les coefficients de PMP^{-1} en positions $(i, 1)$ pour $i \geq 3$ soient nuls.*
2. *Conclure que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice $M = (m_{i,j})$ telle que $m_{i,j} = 0$ dès que $i > j + 1$.*

Exercice 1.27

Soit A, B, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$ et le rang de la matrice par blocs

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Exercice 1.28

Soit $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. Considérons

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

1. *Justifier que $\operatorname{rg}(M) \geq r$.*
2. *Montrer que $\operatorname{rg}(M) = r$ si, et seulement si, $D = CA^{-1}B$.*

Exercice 1.29

Déterminer selon les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ le rang de

$$M_a = \begin{bmatrix} 1 & a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & a \\ a & 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 1.30

1. *Établir l'inversibilité de la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont*

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. *En déduire l'inversibilité des matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et les autres sont de valeur absolue 1.*

Exercice 1.31

Soit $n < m$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Calculer $\det(AB)$.

Exercice 1.32

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0.$$

Exercice 1.33

Soit A, $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$\det(A) = \det(B) = \det(A + B) = \det(A - B) = 0.$$

Montrer que, pour tous x, $y \in \mathbb{R}$,

$$xA + yB \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 1.34

Pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$D_n : x \mapsto \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}.$$

Justifier que D_n est dérivable ; calculer D_n' puis D_n.

2 – Réduction des endomorphismes

Exercice 2.1

Déterminer parmi les matrices suivantes celles qui sont diagonalisables :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.2

Étudier la diagonalisabilité de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ i & 1 & -i & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.3

Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Étudier la diagonalisabilité des matrices de la forme $\alpha A + \beta I_n$ avec α, $\beta \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.4

Soit a, b, $c \in \mathbb{C}$. Considérons les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$B = \begin{bmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{bmatrix}.$$

1. *Diagonaliser la matrice A.*
2. *Exprimer B en fonction de A.*
3. *En déduire une diagonalisation de B puis le calcul des puissances de B.*

Exercice 2.5

Considérons l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par

$$u : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{bmatrix}.$$

Montrer que u est diagonalisable et déterminer une base de diagonalisation.

Exercice 2.6

Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Montrer que A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable. Trigonaliser A.*
2. *Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer que les valeurs propres de M appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$.*
3. *Résoudre l'équation $M^2 = A$.*

Exercice 2.7

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires a, b, c et d pour la diagonalisabilité de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}.$$

Exercice 2.8

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. *Diagonaliser J.*
2. *En déduire la diagonalisation de la matrice*

$$\begin{bmatrix} J & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Exercice 2.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. La matrice

$$\begin{bmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ A & 0_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 2.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice

$$B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 2.11

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & C^{\mathrm{T}} \\ C & 0_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

1. *Déterminer $\mathrm{rg}(A)$. En déduire que X^{n-1} divise le polynôme caractéristique χ_A.*
2. *Montrer que*
$$\chi_A = X^{n-1}(X^2 - \alpha X - \beta)$$
avec β une constante que l'on exprimera à partir de C.
3. *Montrer que si $\beta = 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable.*
4. *Supposons $\beta \neq 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.*

Exercice 2.12

Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulles. Posons $M = \mathrm{I}_n + CL$.

1. *Montrer que*
$$M^2 = (2 + LC)M - (1 + LC)\mathrm{I}_n.$$
2. *Étudier la diagonalisabilité de M.*

Exercice 2.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et vérifiant $\mathrm{tr}(A) = 1$.

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de A.*
2. *Justifier que A est diagonalisable.*

Exercice 2.14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

— *$P(A)$ est diagonalisable,*
— *$P'(A)$ est inversible.*

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 2.15

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est unipotente s'il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $M^k = I_n$. L'ordre de M est alors le plus petit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $M^k = I_n$.

1. *Montrer que toute matrice unipotente est diagonalisable.*
2. *Montrer que si M est unipotente d'ordre p, alors $M^k = I_n$ si, et seulement si, $k \in p\mathbb{Z}$.*
Soit V_n l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et O_n l'ensemble des ordres des éléments de V_n.
3. *Montrer que V_n n'est pas vide et que O_n est fini.*
4. *Déterminer O_2.*

Exercice 2.16

Soit u un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si,

$$E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\ u.$$

Exercice 2.17

Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$u : M \mapsto M^{\mathrm{T}}.$$

Exercice 2.18

Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe à une matrice M la matrice M' définie par

$$\forall k \leq n, \qquad C_k(M') = \sum_{j \neq k} C_j(M).$$

Exercice 2.19

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$u : M \mapsto \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A.$$

Exercice 2.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$u : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)\mathrm{I}_n.$$

Exercice 2.21

L'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $u : M \mapsto M + \operatorname{tr}(M)\mathrm{I}_n$ est-il diagonalisable ?

Exercice 2.22

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et l'endomorphisme

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & (X-a)P' \end{array} \right.$$

Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 2.23

Soit $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Définissons un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ par

$$u : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} (y_k x - x_k y).$$

1. *Montrer que $\sum_{k=1}^n y_k$ est une valeur propre de u et déterminer le sous-espace propre associé.*
2. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.*
3. *Les matrices*

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_1 & \cdots & y_1 \\ y_2 & y_2 & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & y_n & \cdots & y_n \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \end{bmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 2.24

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.

Exercice 2.25

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, il existe n hyperplans H_1, ..., H_n de E, stables par u et tels que

$$\bigcap_{k=1}^{n} H_k = \{0_E\}.$$

Exercice 2.26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversible telle que

$$E_A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \exists \lambda \in \mathbb{C},\ AX = \lambda X\}$$

soit un espace vectoriel. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 2.27

Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\operatorname{tr} A = 0$.

Exercice 2.28

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + \mathrm{I}_n$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 2.29

Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A^5$ et $\operatorname{tr} A = n$.

Exercice 2.30

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admettant 1 et -1 comme valeurs propres et vérifiant $A^4 = A^2$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 2.31

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + \mathrm{I}_n$. Montrer que A est un polynôme en B.

Exercice 2.32

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vérifiant $A^{2^n} = \mathrm{I}_2$. Montrer que $A^2 = \mathrm{I}_2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $A^{2^k} = -\mathrm{I}_2$.

Exercice 2.33

Soit A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle vérifiant $PA = BP$.

1. *Montrer que A et B admettent une valeur propre commune.*
2. *Étudier la réciproque.*

3 – Révisions d'analyse

Exercice 3.1

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Exercice 3.2

Soit (u_n) une suite de limite $\ell \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie par

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

Exercice 3.3

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = \max\left\{ f(\tfrac{k}{n}),\ 0 \leq k \leq n \right\}.$$

Exercice 3.4

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et strictement décroissante.

1. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $a_n \in [0,1]$ tel que $f(a_n) = a_n^n$.*
2. *Étudier la suite (a_n).*

Exercice 3.5

Soit (u_n) une suite positive telle qu'il existe des constantes α, $\beta > 0$ vérifiant $\alpha + \beta < 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} \leq \alpha u_{n+2} + \beta u_n.$$

Montrer que $u_n \to 0$.
Indication : on pourra poser

$$v_n = \max(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$$

et montrer que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 3.6

Soit $a < c < b$ et une suite (u_n) telle que

- $u_{n+1} - u_n \to 0$,
- *il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi_1(n)} \to a$,*
- *il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi_2(n)} \to b$.*

Montrer qu'il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\psi(n)} \to c$.

Exercice 3.7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \to \ell$ en $+\infty$ et

$$f^* : x \mapsto e^{-x} \int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que $f^*(x) \to \ell$ en $+\infty$.

Exercice 3.8

Soit P un polynôme non constant. Montrer que l'équation $P(x) = \sin x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 3.9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue surjective telle que tout réel admet un nombre fini d'antécédents. Montrer que f admet des limites infinies opposées en $\pm\infty$.

Exercice 3.10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y > x,\ \forall t \in [x,y],\ f(t) \geq f(x).$$

Montrer que f est croissante.

Exercice 3.11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$.

Exercice 3.12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, dérivable en $a \in \mathbb{R}$, (x_n) et (y_n) deux suites de limite a telles que, pour tout n, $y_n \neq x_n$. Posons, pour tout n,

$$u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

1. *Supposons que $y_n > a > x_n$ pour tout n. Déterminer la limite de (u_n).*
2. *Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a. Que dire de la suite (u_n) ?*
3. *Examiner le cas général.*

Exercice 3.13

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable nulle en a et b. Montrer que, par tout point $(x, 0)$ avec $x \notin [a,b]$, il passe au moins une tangente à la courbe représentative de f.

Exercice 3.14

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \in]a,b[$. Supposons qu'il existe $y > f(x)$ tel que le cercle de centre (x,y) et de rayon $y-f(x)$ soit au-dessus de la courbe représentative de f. Montrer que $f'(x) = 0$.

Exercice 3.15

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x) - f(y) \leq (x-y)^2.$$

Exercice 3.16

Soit $f : I \to \mathbb{C}^*$ dérivable. Montrer que $t \mapsto |f(t)|$ est croissante si, et seulement si,

$$\forall t \in I,\ \mathfrak{Re}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) \geq 0.$$

Exercice 3.17

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = n(u_n - n).$$

Montrer que $u_n = O(n)$ si, et seulement si, $u_1 = 2e$.

Exercice 3.18

Définissons une suite (u_n) par $u_1 > 0$ et,

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + nu_n^2}.$$

1. *Montrer que $nu_n \leq 1$ pour $n \geq 2$.*
2. *Montrer que la suite (nu_n) est croissante.*
3. *Déterminer un équivalent de u_n.*

Exercice 3.19

1. *Montrer que, pour n assez grand, l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}_+^*$, notées $u_n < v_n$.*
2. *Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on précisera puis déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.*
3. *Déterminer la limite de (v_n) puis donner un équivalent de v_n.*
4. *Donner un développement asymptotique de v_n.*

Exercice 3.20

Notons, pour tout n, $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{2n} x^k$.

1. *Déterminer les variations de P_n sur $[-1,0]$.*
2. *Montrer que P_n atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en un unique point u_n.*
3. *Montrer que (u_n) converge.*

Exercice 3.21

Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}.$$

Montrer que f réalise une bijection de $[e,+\infty[$ dans $[e,+\infty[$ puis déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ en $+\infty$.

Exercice 3.22

Calculer, pour tout n, $\arcsin^{(n)}(0)$.

Exercice 3.23

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a < b \in I$.

1. *Définissons l'application φ définie par $\varphi(x)$*

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$

   où A est une constante choisie de sorte à ce que $\varphi(a) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

2. *En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)$ soit égal à*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

4 – Séries numériques

Exercice 4.1

Déterminer la nature de la série de terme général

1. $n^{-1-\frac{1}{n}}$
2. $\arccos(\frac{2}{\pi}\arctan(n^\alpha))$
3. $\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))\ldots\ln(\ln(\ldots(\ln(n))\ldots))}$
4. $\ln\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$
5. $\frac{n^2-2}{n!}$
6. $\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!}$ *pour* $a>0$
7. $e^{-(\ln n)^\alpha}$ *pour* $\alpha>0$

Exercice 4.2

Soit $p\geq 1$ *un entier. Posons, pour tout* $n\geq 1$,

$$u_n=\begin{cases}\frac{1-p}{n} & \text{si } p|n,\\ \frac{1}{n} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que la série de terme général u_n *converge et calculer sa somme.*

Exercice 4.3

Soit (u_n) *une suite de réels positifs. Déterminer la nature de la série de terme général* $\frac{u_n e^{-u_n}}{n^2}$.

Exercice 4.4

Déterminer, selon les valeurs de a, b, $c\in\mathbb{R}$, *la nature de la série de terme général*

$$u_n=a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}+c\sqrt{n+2}.$$

Exercice 4.5

Soit a, b *et* $c>0$. *Déterminer la nature de la série de terme général*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{ka+b}-c\ln n.$$

Exercice 4.6

Soit $(a_n)_n$ *une suite d'entiers composés deux à deux premiers entre eux. Déterminer la nature de la série de terme général* $\frac{1}{a_n}$.

Exercice 4.7

Déterminer la nature des séries dont le terme général est

1. $(\cos\frac{1}{n})^{n^\alpha}$ *pour* $\alpha\in\mathbb{R}$.
2. $(n\sin\frac{1}{n})^{n^\alpha}$ *pour* $\alpha\in\mathbb{R}$.
3. $(n\sin\frac{1}{n})^{n^2}-e^{-\frac{1}{6}}$

Exercice 4.8

Déterminer la nature de la série de terme général n^2r^{-n} *pour* $r>0$.

Exercice 4.9

Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Exercice 4.10

Soit $\alpha>0$. *Déterminer la nature de la série de terme général*

$$\sum_{k=1}^{n}(n+k)^{-\alpha}.$$

Exercice 4.11

Notons, pour tout n, H_n *la somme partielle de la série harmonique. Montrer que la série de terme général*

$$\frac{H_n}{n(n+1)(n+2)}$$

est convergente ; calculer sa somme.

Exercice 4.12

Soit $(u_n)_n$ *une suite telle que* $u_{n+1}=o(u_n)$.

1. *Montrer que la série de terme général* u_n *converge.*
2. *Montrer que*

$$\sum_{k=n}^{\infty}u_k\sim u_n.$$

Exercice 4.13

Considérons une série convergente de terme général $u_n>0$. *Montrer que*

$$\sum_{k=0}^{n}ku_k=o(n).$$

Indication : on pourra introduire R_n *le reste partiel de la série.*

Exercice 4.14

Déterminer la nature de la série de terme général

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 4.15

Déterminer la nature de la série de terme général

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2}.$$

Exercice 4.16

Soit une série divergente, de terme général u_n positif ; notons S_n la n-ième somme partielle de cette série.

1. *Montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$ diverge.*
2. *Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $\frac{u_n}{S_n^{1+\alpha}}$ converge.*

Exercice 4.17

1. *Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{\ln n}{n}$.*
   Notons S_n sa n-ième somme partielle.
2. *Montrer que $S_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$.*
3. *Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que*

$$S_n = \tfrac{1}{2}(\ln n)^2 + c + o(1).$$

Exercice 4.18

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

1. *Montrer que si $\ell < 0$, alors la série de terme général $f(n)$ converge.*
2. *Montrer que si $\ell > 0$, alors la série de terme général $f(n)$ diverge.*
3. *Exhiber des fonctions f pour lesquelles on a $\ell = 0$ et pour lesquelles la nature de la série de terme général $f(n)$ diffère.*

Exercice 4.19

Déterminer la nature de la série de terme général

1. $\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$
2. $\frac{(-1)^n}{n+\frac{(-1)^n n}{\ln n}}$
3. $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \ln n}$
4. $\frac{1}{\ln n+(-1)^n n^\alpha}$ *avec* $\alpha > 0$
5. $\frac{(-1)^n}{H_n+(-1)^n}$.

Exercice 4.20

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n \cos(u_n)$. Étudier la convergence des séries de terme général

$$(-1)^n u_n, \qquad \ln\cos(u_n), \qquad u_n.$$

Exercice 4.21

La série de terme général réel u_n enveloppe le réel A si,

— *pour tout n, $u_n \neq 0$,*
— *pour tout n,*

$$|A - (u_0 + \ldots + u_n)| < |u_{n+1}|.$$

Elle enveloppe strictement A si,

— *pour tout $n \geq 1$, $u_n \neq 0$,*
— *il existe une suite (θ_n) à valeurs dans $]0, 1[$ telle que, pour tout n,*

$$A - (u_0 + \ldots + u_n) = \theta_{n+1} u_{n+1}.$$

1. (a) *Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A \in \mathbb{R}_+$.*
   (b) *Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.*
   (c) *Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.*
2. *Montrer que si la série de terme général u_n enveloppe strictement A, alors elle est alternée.*
   Montrer que A est compris entre deux sommes partielles consécutives.
3. *Montrer que si la série de terme général u_n est alternée et que, pour tout $n \geq 1$,*

$$A - (u_0 + \ldots + u_n)$$

   est du signe de u_{n+1}, alors elle enveloppe strictement A.
4. *Montrer que si la série de terme général u_n enveloppe A et que la suite $(|u_n|)$ est stricte-*

ment décroissante, alors la série est alternée et enveloppe strictement A.

Exercice 4.22

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout n,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. *Montrer que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge.*
2. *Exprimer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_n^2}$ à l'aide de u_{n+1}.*
3. *Trouver un équivalent simple de u_n.*

Exercice 4.23

Montrer que la suite (x_n) définie, pour $n \geq 1$, par

$$x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

est convergente.

Exercice 4.24

Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la suite (x_n) définie, pour $n \geq 1$, par

$$x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^\alpha}\right)$$

est convergente.

Exercice 4.25

Considérons une série de terme général positif tel que la somme partielle vérifie

$$\forall n \geq 1, \qquad S_{2n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) S_n.$$

Montrer que cette série converge.

Exercice 4.26

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout n, d_n la n-ième décimale de x.
Montrer que la série de terme général

$$10^{-n} \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$$

converge et calculer sa somme.

5 – Intégration

Exercice 5.1

Calculer

$$\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^3(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 5.2

Déterminer une primitive de $x \mapsto \sqrt{2+\tan^2 x}$.

Exercice 5.3

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ *et tout* n,

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

1. *Montrer que, pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ *et tout* n,
$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$
2. *Montrer que, pour tout* $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$,
$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. *Exprimer* $\int_0^{\pi} tD_n(t)\,\mathrm{d}t$ *comme une somme puis retrouver la valeur* $\zeta(2)$.

Exercice 5.4

Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite (I_n) *où*

$$I_n = \int_1^e (\ln t)^n\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 5.5

1. *Déterminer l'unique solution* α *de l'équation* $\mathrm{sh}(x) = 1$. *Posons, pour tout* n,
$$I_n = \int_0^{\alpha} \mathrm{sh}^n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
2. *Montrer que, pour tout* $n \geq 2$,
$$nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}.$$
3. *En déduire un équivalent de* I_n.
Indication : on pourra passer pas un encadrement judicieux.

Exercice 5.6

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ *continue. Montrer que*

$$\left(\int_a^b f(t)^n\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} \to \sup\{f(t),\ t \in [a,b]\}.$$

Exercice 5.7

Déterminer un équivalent en 0 *de*

$$x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 5.8

Définissons une fonction que $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$ *par*

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Déterminer les limites de f *aux bornes de* D.

Exercice 5.9

Montrer que

$$\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}e^{x^2}.$$

Exercice 5.10

Soit $a > 0$ *et* $f : [0,a[\to \mathbb{C}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$. *Montrer que*

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Indication : on pourra introduire une primitive de $|f'|$.

Exercice 5.11

Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ *telle que l'intégrale de*

$$x \mapsto \frac{\ln x}{(1-x)^{\alpha}}$$

soit convergente sur $]0,1[$.

Exercice 5.12

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$ *est intégrable sur* $]0,1[$ *et déterminer son intégrale.*

Exercice 5.13

Soit $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer quand elle existe l'intégrale

$$\int_a^b (t-a)^\alpha (b-t)^n \,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 5.14

Déterminer selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'existence et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t}{\cos^\alpha(t) + \sin^\alpha t} \,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 5.15

Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer son intégrale.

Exercice 5.16

Soit $f : x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{x^2}$.

1. *Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons I son intégrale.*
2. *Établir que*

$$\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{4}{3} I.$$

3. *Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^2}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$.*
4. *Calculer I.*

Exercice 5.17

1. *Justifier, pour tout $n > 0$, l'existence des intégrales*

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^n)} \,\mathrm{d}t,$$
$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)} \,\mathrm{d}t\,.$$

2. *Montrer que, pour tout $n > 0$, $I_n = J_n$ puis calculer cette valeur commune.*

Exercice 5.18

1. *Justifier l'existence des intégrales*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} \,\mathrm{d}t, \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} \,\mathrm{d}t$$

2. *Montrer que $I = J$.*
3. *Calculer la valeur de $I + J$ à l'aide du changement de variables $u = t - \frac{1}{t}$.*
4. *En déduire la valeur de I.*

Exercice 5.19

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue de limite ℓ en 0 et de limite ℓ' en $+\infty$, a, $b > 0$.

1. *Montrer que*

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} \,\mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell' \ln \frac{b}{a}$$

puis énoncer un résultat concernant la limite en 0 de cette fonction.

2. *Montrer que l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} \,\mathrm{d}t$$

est convergente puis déterminer sa valeur.

3. *Calculer les intégrales*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} \,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 5.20

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue de limite ℓ en $+\infty$ et $a > 0$. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t+a) - f(t) \,\mathrm{d}t$$

est convergente.

Exercice 5.21

Montrer que la fonction $x \mapsto x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est intégrable sur $]0, 1]$ et déterminer son intégrale.

Exercice 5.22

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ est intégrable sur $]0, 1]$ et déterminer son intégrale.

Exercice 5.23

Posons $f : x \mapsto \cos(x^2)$.

1. *Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que l'intégrale de f est convergente sur $\mathbb{R}_+$.*

Exercice 5.24

Étudier la convergence de l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de

$$x \mapsto \sqrt{x+\cos x} - \sqrt{x}.$$

Exercice 5.25

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \underset{+\infty}{=} O(\frac{1}{x^2})$ et $a > 0$. Posons

$$\begin{aligned} g : x \mapsto & f\left(x + \frac{a}{x}\right) \\ h : x \mapsto & f\left(\sqrt{4a + x^2}\right) \end{aligned}$$

Montrer que g et h sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et que leurs intégrales sont égales.

Exercice 5.26

Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que l'intégrale de

$$x \mapsto e^{ix^\alpha}$$

soit convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.27

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. *Supposons dorénavant f' intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ sont de même nature.*
3. *Soit $\alpha > \frac{1}{2}$. Déterminer la nature de la série de terme général $n^{-\alpha} \cos \sqrt{n}$.*

Exercice 5.28

Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Posons, pour tout $n > 0$,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que l'intégrale de f sur $]0, 1]$ converge si, et seulement si, la suite (S_n) converge et, que dans ce cas

$$S_n \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

6 – Suites et séries de fonctions

Exercice 6.1

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue en* 0. *Étudier la suite de fonctions* (f_n) *définie par* $f_n : x \mapsto \varphi(\frac{x}{n})$.

Exercice 6.2

Étudier la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *par*

$$f_n : x \mapsto n \cos x \sin^n x.$$

Exercice 6.3

Étudier la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n : x \mapsto \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

Exercice 6.4

Étudier la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ *par*

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{1 + x + \ldots + x^n}.$$

Exercice 6.5

Étudier la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ *par*

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} nx^n \ln x & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6.6

Étudier la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ *par*

$$f_n : x \mapsto n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

Exercice 6.7

Étudier la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n : x \mapsto \sin \tfrac{(n+1)x}{n}.$$

Exercice 6.8

Étudier la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n : x \mapsto nxe^{-x^2 \ln n}.$$

Exercice 6.9

Étudier la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $[0, \pi]$ *par*

$$f_n : x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{n \sin^2(x)}.$$

Exercice 6.10

Étudier la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n : x \mapsto \min(n, \frac{x^2}{n}).$$

Exercice 6.11

Étudier la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par*

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 6.12

Étudier la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f_0 : x \mapsto \sin x$ *et, pour tout* n *et tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = \sin f_n(x).$$

Exercice 6.13

Étudier la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{n} & \text{si } n = 0[2] \\ \frac{1}{n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6.14

Considérons la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. *Étudier la convergence de* (f_n) *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Justifier que chaque fonction* f_n *est dérivable.*
3. *Étudier la convergence de* (f'_n) *sur le segment* $[-1, 1]$.

Exercice 6.15

Considérons la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$

par

$$f_n : x \mapsto 3^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right).$$

1. *Étudier la convergence de la suite* (f_n).
2. *Comparer la limite de la suite des intégrales de* f_n *et l'intégrale de la limite de cette suite.*

Exercice 6.16

Soit $d \in \mathbb{N}$ *et* (P_n) *une suite de fonctions polynomiales de degré au plus* d *qui converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction polynomiale* P.

1. *Montrer que* P *est de degré au plus* d.
2. *Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment.*

Exercice 6.17

Définissons une suite de fonctions (f_n) *sur* $[0,1]$ *par* $f_0 : x \mapsto 0$ *et, pour tout* n *et tout* $x \in [0,1]$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2).$$

Étudier la convergence de (f_n).

Exercice 6.18

Considérons, pour tout n*, la fonction*

$$\varphi_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n}(1-x^2)^n & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où α_n *est un réel choisi de sorte à ce que*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

1. *Calculer* α_n.
2. *Montrer que, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) 1_{|t|>\varepsilon}\,\mathrm{d}t \to 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue et bornée. Posons, pour tout* n,

$$f_n : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

3. *Montrer que* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur tout segment.*
4. *Conclure.*

Exercice 6.19

Montrer que la série de fonctions de terme général

$$\frac{(-1)^n e^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ *mais pas normalement.*

Exercice 6.20

1. *Déterminer le domaine de convergence de la série de fonctions de terme général*

$$\frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n}.$$

Notons f *la somme de cette série.*

2. *Montrer que* f *est dérivable.*
3. *Montrer que* f *est monotone.*
4. *Étudier* f *en* $+\infty$.

Exercice 6.21

Soit (a_n) *une suite réelle bornée. Définissons* f *comme la somme de la série de fonctions de terme général*

$$\frac{|x-a_n|}{3^n}.$$

1. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
3. *Étudier la dérivabilité de* f.

Exercice 6.22

Considérons la somme f *de la série de fonctions de terme général (pour* $n \geq 1$*)*

$$\frac{x}{x^2+n^2}.$$

1. *Montrer que* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer un équivalent en* 0 *de* f.
3. *Déterminer un équivalent en* $+\infty$ *de* f.

Exercice 6.23

Considérons la somme f *de la série de fonctions de terme général*

$$e^{-\sqrt{n}x}.$$

1. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur son domaine de définition.*
2. *Déterminer un équivalent en* 0 *de* f.

Exercice 6.24

Soit f la somme de la série de fonctions de terme général

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}.$$

1. *Déterminer le domaine de définition puis le domaine de dérivabilité de f.*
2. *Montrer que f est solution d'une équation différentielle.*
3. *Résoudre cette équation.*

Exercice 6.25

Soit f la somme de la série de fonctions de terme général

$$f_n : x \mapsto \ln(1 + e^{-nx}).$$

1. *Déterminer le domaine D de définition de f.*
2. *Montrer que f est continue, strictement décroissante sur D.*
3. *Montrer que f admet une limite en $+\infty$.*
4. *Donner un équivalent de f en 0.*

Exercice 6.26

Soit $\alpha > 0$. Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$f_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}.$$

1. *Déterminer les α tels que la série de fonction de terme général f_n converge normalement. Notons S_α la somme pour de tels α.*
2. *Montrer que S_α est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
3. *Montrer que S_1 n'est pas continue en 0.*
4. *Montrer que, pour $\alpha < 1$, S_α est continue en 0.*

Exercice 6.27

Soit (a_n) une suite strictement positive, croissante, de limite $+\infty$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n t} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Exercice 6.28

Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto x^{\lfloor \ln n \rfloor}$.

Exercice 6.29

Soit $a : \mathbb{R}_+^* \to [1, +\infty[$ telle que $\ln x \underset{+\infty}{=} o(a(x))$. Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a(n)x}.$$

1. *Préciser le domaine de définition de f.*
2. *Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.*
3. *Dans le cas où a est une fonction puissance, déterminer un équivalent de f en 0.*

Exercice 6.30

Posons, pour tout n,

$$f_n : z \mapsto \frac{z^{2^{n-1}}}{\sum_{k=0}^{2^n-1} z^k}.$$

1. *Déterminer le domaine (complexe) de convergence simple de la série de fonctions de terme général f_n.*
2. *La convergence est-elle uniforme sur D ?*
3. *Exprimer la somme à l'aide de fonctions usuelles.*

7 – Intégrales à paramètre

Exercice 7.1

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue telle que $x \mapsto f(x)e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^n f(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t\,.$$

Exercice 7.2

Déterminer la limite de (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^n \left(\cos\frac{t}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}t\,.$$

Exercice 7.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. *Déterminer la limite de (u_n).*
2. *Trouver un équivalent de u_n.*

Exercice 7.4

Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$f_n : x \mapsto \frac{n}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right).$$

1. *Justifier que, pour tout $n \geq 1$, f_n est intégrable sur $]1, +\infty[$.*
2. *Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par*
$$u_n = \int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 7.5

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Étudier la convergence de la suite (u_n) définie, pour tout n, par

$$u_n = n^2 \int_0^1 (t^n - t^{n+1}) f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 7.6

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t\,\mathrm{ch}\,\frac{t}{n^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 7.7

Déterminer des équivalents des suites définies par

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 7.8

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t\,.$$

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 7.9

Notons, pour tout n,

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1 + t + \ldots + t^n}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. *Montrer que $u_n \to 0$.*
2. *Déterminer la nature de la série de terme général u_n.*

Exercice 7.10

Montrer que, pour tout x,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \arctan x.$$

Exercice 7.11

Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\frac{x}{t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 7.12

Posons

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. *Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$; en déduire $f(x)$ pour $x > 0$.*
3. *Calculer $f(0)$.*

Exercice 7.13

Définissons une fonction par

$$f : x \mapsto \int_0^1 |\ln t|^x \ln(1-t)\, \mathrm{d}t\,.$$

1. *Préciser le domaine de définition de f.*
2. *Étudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de f.*

Exercice 7.14

Définissons une fonction par

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{x + \operatorname{ch} t}\, \mathrm{d}t\,.$$

1. *Préciser le domaine de définition de f.*
2. *Étudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de f.*
3. *Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.*
4. *Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.*

Exercice 7.15

Définissons deux fonctions par

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$
$$g : x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \right)^2$$

1. *Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que $g = \frac{\pi}{4} - f$.*
3. *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss*

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t\,.$$

Exercice 7.16

Définissons deux fonctions sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$
$$g : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \cos x + \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t \sin x$$

1. *Justifier l'existence des intégrales apparaissant dans la définition de f et de g.*
2. *Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:*

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

3. *En déduire que $f = g$.*
4. *Conclure sur la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$.*

Exercice 7.17

Définissons une fonction par

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, \mathrm{d}t\,.$$

1. *Préciser le domaine de définition de f.*
2. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.*
3. *Calculer f.*
4. *En déduire, pour $a, b > 0$ l'expression de*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Exercice 7.18

Définissons une fonction par

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t\,.$$

1. *Préciser le domaine de définition de f.*
2. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*
3. *Déterminer un équivalent de f' en $+\infty$.*
4. *Calculer $f - f'$.*
5. *En déduire un développement asymptotique de f à deux termes en $+\infty$.*

Exercice 7.19

Calculer la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{2\pi} e^{2x \cos t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Exercice 7.20

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle en dehors d'un *segment de la forme $[-A, A]$. Posons*

$$F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} \,\mathrm{d}t\,.$$

1. *Préciser le domaine de définition de F.*
2. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
3. *Montrer que, pour tout n, il existe une constante C_n telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |F(x)| \leq C_n x^{-n}.$$

Exercice 7.21

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, définissons une fonction $I_{1/2}(f)$ par $I_{1/2}(f)(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$,

$$I_{1/2}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} \,\mathrm{d}t\,.$$

1. *Pour tout $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, justifier que $I_{1/2}(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ puis que, pour tout $x > 0$,*

$$I_{1/2}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(x-t)}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t\,.$$

2. *Pour tout $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que $I_{1/2}(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée, notée $D_{1/2}(f)$, vérifie, pour tout $x > 0$,*

$$D_{1/2}(f)(x) = I_{1/2}(f')(x) + \frac{f(0)}{\sqrt{\pi x}}.$$

3. *Calculer $I_{1/2}(f)$ pour les fonctions*

$$\begin{aligned} f : x \mapsto & x^n \\ f : x \mapsto & x^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

   avec $n \in \mathbb{N}$.

4. *En déduire que, pour toute fonction f polynomiale et tout $x > 0$,*

$$\begin{aligned} I_{1/2}(I_{1/2}(f))(x) &= \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t \\ D_{1/2}(I_{1/2}(f))(x) &= f(x). \end{aligned}$$

8 – Séries entières

Exercice 8.1

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n où

1. $a_n = \frac{n^n}{n!}$
2. $a_n = e^{\alpha\sqrt{n}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$
4. a_n est la n-ième décimale de π
5. a_n est le n-ième terme de la suite de Fibonacci
6. $a_n = k!$ si $n = k^2$ pour un $k \in \mathbb{N}$, 0 sinon
7. $a_n = \frac{2^{(-1)^n}}{n}$

Exercice 8.2

Soit (a_n) une suite réelle. Comparer les rayons de convergence des séries entières de coefficient a_n et a_n^n.

Exercice 8.3

Soit (a_n) et (b_n) des suites complexes telles que

$$|a_n| \sim |b_n|.$$

Montrer que les séries entières de coefficients a_n et b_n ont même rayon de convergence.

Exercice 8.4

Soit (a_n) une suite ne s'annulant pas telle que

$$\frac{a_{n+3}}{a_n} \to \ell.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.

Exercice 8.5

Montrer que le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n est la borne supérieure de l'ensemble des $r \geq 0$ tel que la suite

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k r^k\right)$$

est bornée.

Exercice 8.6

Soit (a_n) une suite de complexes non nuls. Notons R et R' les rayons de convergence des séries entières de coefficients a_n et $\frac{1}{a_n}$. Montrer que si R et R' sont finis, alors $RR' \leq 1$.

Exercice 8.7

Soit (a_n) une suite telle que

- *la série entière de coefficient a_{2n} est de rayon $R > 0$,*
- *la série entière de coefficient a_{2n+1} est de rayon $R' > 0$.*

Déterminer le rayon de la série entière de coefficient a_n.

Exercice 8.8

Déterminer la somme de la série entière $\sum \frac{1}{2n+1} x^n$.

Exercice 8.9

Déterminer la somme de la série entière

$$\sum \frac{4n+1}{(2n-1)(n+1)} x^n.$$

Exercice 8.10

Déterminer la somme de la série entière $\sum \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$.

Exercice 8.11

Déterminer la somme de la série entière $\sum \frac{n}{(2n+1)!} x^n$.

Exercice 8.12

Soit (a_n) une suite à valeurs strictement positives. Notons, pour tout n, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Supposons que

$$\frac{a_n}{A_n} \to 0.$$

1. *Déterminer le rayon des séries entières de coefficients a_n et A_n.*
2. *Lier les sommes de ces deux séries.*

Exercice 8.13

Posons, pour tout n,

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t\,.$$

1. *Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.*
2. *Trouver une relation de récurrence liant a_n et a_{n+2}.*
3. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.*
4. *Préciser la nature de la série de terme général $a_n \alpha^{\sqrt{n}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Exercice 8.14

Considérons la série entière de coefficient $\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ *et notons* f *sa somme.*

1. *Préciser le rayon de convergence* R *de cette série entière.*
2. *Étudier la convergence de la série entière en* $-R$ *et en* R.
3. *Calculer la limite en* R^- *de* f.

Exercice 8.15

Soit (a_n) *une suite telle que la série de terme général* a_n *est absolument convergente. Notons* f *la somme de la série entière de coefficient* $\frac{a_n}{n!}$. *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 8.16

Soit $\alpha > 0$. *Développer en série entière*

$$x \mapsto \frac{(\operatorname{sh}\alpha)x}{x^2 - 2(\operatorname{ch}\alpha)x + 1}.$$

Exercice 8.17

Développer en série entière $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 8.18

Développer en série entière

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 8.19

Développer en série entière

$$x \mapsto e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 8.20

Soit $a \in \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(ax).$$

1. *Justifier que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$.
2. *Montrer que* f *n'est pas développable en série entière si* $|a| > 1$ *et* $f(0) \neq 0$.
3. *Montrer que* f *est développable en série entière si* $|a| \leq 1$.

Exercice 8.21

Soit $a > 0$ *et* $f : [0, a[\to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, a[, \qquad f^{(n)}(x) \geq 0.$$

1. *Notons, pour tout* n, $R_n(x)$ *le reste intégral de Taylor d'ordre* n *de* f *en* 0. *Montrer que* $x \mapsto x^{-n-1}R_n(x)$ *est décroissante sur* $[0, a[$.
2. *En déduire que* f *est développable en série entière sur* $[0, a[$.

Exercice 8.22

Posons

$$f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. *Montrer que* f *est solution de l'équation différentielle* (E)

$$xy'' + y' - xy = -1.$$

2. *Déterminer les solutions de* (E) *développables en série entière.*
3. *En déduire la valeur des intégrales*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 8.23

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} x^{2n+1}.$$

2. *Montrer que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} = \sqrt{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)}.$$

Indication : considérer une équation différentielle.

Exercice 8.24

Considérons la suite (a_n) *définie par* $a_0 = 1$ *et,* pour tout n,

$$a_n = \frac{-1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n-k}}{k!}.$$

1. Montrer que, pour tout n, $a_n \in \mathbb{Q}$.

   Notons f la somme de la série entière de coefficient a_n et R son rayon.
2. Montrer que $R \geq 1$.
3. Montrer que, pour $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \frac{2}{e^x + 1}.$$

Exercice 8.25

Pour tout $n \geq 1$, notons B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Posons $B_0 = 1$.

1. Montrer que, pour tout n,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

2. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière de coefficient $\frac{B_n}{n!}$ est strictement positif.

   Soit f la somme de cette série entière.
3. Déterminer une équation différentielle dont f est solution.
4. Exprimer f puis, en déduire une expression de B_n.

Exercice 8.26

Une application $f : X \to X$ est une involution de l'ensemble X si $f \circ f = \mathrm{Id}$.
Notons $I_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, I_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments.

1. Calculer I_1, I_2 et I_3.
2. Montrer que, pour tout n,

$$I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n.$$

   Soit$R$ le rayon de la série entière de coefficient $\frac{I_n}{n!}$ et f sa somme.
3. Montrer que $R > 0$.
4. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f'(x) = (1+x)f(x) + 1 + x.$$

   En déduire f.

Exercice 8.27

Notons, pour tout $p \leq n$, $A_{n,p}$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ admettant exactement p points fixes.
Soit f la somme de la série entière de coefficient $A_{n,0}$ et R son rayon de convergence.

1. Exprimer $A_{n,p}$ en fonction de $A_{n-p,0}$.
2. Calculer $\sum_{p=0}^{n} A_{n,p}$.
3. Montrer que $R \geq 1$ et calculer f sur l'intervalle $]-R, R[$.
4. Calculer $A_{n,p}$ pour tous $p \leq n$.

9 – Espaces probabilisés

Exercice 9.1

Soit A_1, ..., A_n des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. *Montrer que*
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i).$$
2. *Montrer que*
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

Exercice 9.2

Soit A_1, ..., A_n des événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k\Big) \leq \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\Big).$$

Exercice 9.3

Soit A_1, ..., A_n des événements. Définissons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, B_k l'événement « au moins k événements parmi A_1, ..., A_n sont réalisés ».
Montrer, en calculant l'espérance d'une somme d'indicatrices judicieusement choisies, que
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k).$$

Exercice 9.4

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On pose
$$\limsup A_n = \bigcap_{p\geq 1}\big(\bigcup_{n\geq p} A_n\big).$$

1. *Montrer que $\limsup A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe une infinité d'indices k vérifiant $\omega \in A_k$.*
2. *Interpréter de même l'événement*
$$\liminf A_n = \bigcup_{p\geq 1}\big(\bigcap_{n\geq p} A_n\big).$$

Exercice 9.5

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{p\geq 1}\Big(\bigcup_{n\geq p} A_n\Big)\Big) = 0.$$

Exercice 9.6

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge. Montrer que
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{p\geq 1}\Big(\bigcup_{n\geq p} A_n\Big)\Big) = 1.$$

Exercice 9.7

On considère des dés équilibrés et des lancers indépendants.

1. *Comparer la probabilité d'obtenir un 6 en lançant un dé et la probabilité d'obtenir un double 6 en lançant deux dés.*
2. *Comparer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en lançant un dé quatre fois et la probabilité d'obtenir au moins un double 6 en lançant deux dés vingt-quatre fois.*

Exercice 9.8

Une urne contient n boules blanches et n boules colorées. On tire les boules deux par deux sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir à chaque tirage une boule blanche et une boule colorée ?

Exercice 9.9

Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire toutes les boules successivement et sans remise.

1. *Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant, non nécessairement consécutivement.*
2. *Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant et consécutivement.*

Exercice 9.10

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges ; tirons les boules avec les règles suivantes

— *si la boule est blanche, on la retire définiti-*

vement ;

— *si la boule est rouge, on la replace dans l'urne.*

Déterminer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages.

Exercice 9.11

Soit $n \geq 2$. Considérons un jeu de cartes numérotées initialement de 1 à n. Après avoir mélangé les cartes, quelle est la probabilité que

1. *la carte 1 soit plus loin dans le paquet que la carte 2 ?*
2. *les cartes 1 et 2 soient voisines ?*

Exercice 9.12

Soit $n \geq 2$. Une permutation $\sigma \in S_n$ bat un record en $j \in [\![1, n]\!]$ si $\sigma(j) > \sigma(i)$ pour tout $i < j$.
Déterminer la probabilité qu'une permutation choisie uniformément dans S_n batte un record en j.

Exercice 9.13

Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers, $n \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq p_1 < p_2 \leq n$. Considérons l'ensemble $\Omega = [\![1, n]\!]$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ et définissons les événements

$$E_1 = \{k \in \Omega,\ p_1 | k\}, \qquad E_2 = \{k \in \Omega,\ p_2 | k\}.$$

Montrer que E_1 et E_2 sont indépendants si, et seulement si, n s'écrit sous la forme $n = kp_1p_2 + \ell p_1$ avec k, $\ell \in \mathbb{N}$ vérifiant $\ell p_1 < p_2$.

Exercice 9.14

Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Notons P_n l'ensemble des diviseurs premiers de n et définissons, pour tout $p \in \mathrm{P}_n$,

$$A_p = \{a \in \Omega,\ p | a\}.$$

1. *Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ pour tout $p \in \mathrm{P}_n$.*
2. *Montrer que les événements A_p pour $p \in \mathrm{P}_n$ sont indépendants.*
   Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction d'Euler ($\varphi(n)$ est donc le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $k \wedge n = 1$).
3. *Montrer que*

$$\varphi(n) = n \prod_{p \in \mathrm{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

10 – Variables aléatoires

Exercice 10.1

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et Y la variable telle que la loi de Y sachant $X=k$ est uniforme sur $[\![1,k]\!]$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 10.2

Soit X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres 1, $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{1}{n}$. Considérons N la variable aléatoire égale à 0 si $X_1=\ldots=X_n=1$ et à

$$\min\{k\leq n,\ X_k=0\}$$

sinon. Déterminer la loi de N.

Exercice 10.3

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$.

1. *Déterminer la loi des variables $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$.*
2. *Déterminer la probabilité de l'événement $\max(X,Y)\leq Z$.*

Exercice 10.4

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Posons $F_X : x\mapsto \mathbb{P}(X\leq x)$, la fonction de répartition de X.

1. *Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,*
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\geq 0}} F_X(x+\varepsilon)=\mathbb{P}(X\leq x).$$
2. *Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,*
$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon> 0}} F_X(x-\varepsilon)=\mathbb{P}(X< x).$$

Soit Y une variable aléatoire réelle discrète.

3. *Montrer que, si X et Y ont la même fonction de répartition, alors X et Y ont la même loi.*
4. *Montrer que, si $\mathbb{P}(X\geq x)=\mathbb{P}(Y\geq x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, alors X et Y ont la même loi.*

Exercice 10.5

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Notons $X\prec Y$ si, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X\geq t)\leq \mathbb{P}(Y\geq t).$$

1. *Montrer que $X\prec Y$ si, et seulement si, pour toute fonction $h:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ croissante et bornée,*
$$\mathbb{E}\left(h(X)\right)\leq \mathbb{E}\left(h(Y)\right).$$
2. *On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Montrer que $X\prec Y$ si, et seulement si, $\lambda\leq\mu$.*
3. *On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et que $X\prec Y$. Montrer que $\mathbb{P}(X\leq Y)\geq 1/2$.*

Exercice 10.6

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice

$$G : z\mapsto \frac{1}{2-z^2}.$$

Déterminer la loi de X puis de $\frac{X}{2}$.

Exercice 10.7

Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ et de fonction génératrice G.

1. *Montrer que, pour tout $t\geq 1$ et tout $a\in\mathbb{R}$,*
$$\mathbb{P}(X\geq a)\leq \frac{G(t)}{t^a}.$$
2. *En déduire que $\mathbb{P}(X\geq 2\lambda)\leq\left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}$.*

Exercice 10.8

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice égale à

$$G : z\mapsto a\exp(1+z^2)$$

pour $z\in\mathbb{R}$, pour un certain $a\in\mathbb{R}$.

1. *Trouver la valeur de a.*
2. *Déterminer la loi de X.*
3. *Est-ce que X admet une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.*

Exercice 10.9

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de Bernoulli de paramètre p. Notons T_n l'indice du n-ième « succès ».

1. *Déterminer la loi de T_n.*
2. *Développer en série entière $z \mapsto (1-z)^n$.*
3. *Calculer la fonction génératrice de T_n puis en déduire $\mathbb{E}(T_n)$.*

Exercice 10.10

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice égale à

$$G : z \mapsto 1 - \sqrt{1-z}$$

pour $|z| < 1$.

1. *Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour $n \geq 0$.*
2. *Soit Y une variable aléatoire indépendante de même loi que X, définie sur le même espace de probabilité que X. Calculer*
$$\mathbb{P}(X + Y = n).$$
3. *La variable X admet-elle une espérance ?*

Exercice 10.11

1. *Montrer que la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ est uniquement déterminée par ses moments.*
2. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $R \in]0, 1[$ vérifiant*
$$\mathbb{P}(X = n) = o(R^n).$$
Posons
$$\phi : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \mathbb{P}(X = n).$$
   (a) *Montrer que, pour tout $k \geq 0$,*
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \phi(t) \, \mathrm{d}t \,.$$
   (b) *Montrer que ϕ est développable en série entière autour de tout point.*
   (c) *Montrer que les moments de X caractérisent la loi de X.*

Exercice 10.12

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{E}((X - m)^2).$$

Exercice 10.13

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

1. *Montrer que, pour toute fonction strictement convexe $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$,*
$$\forall a > 0, \ \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X|))}{f(a)}.$$
2. *Supposons de plus que X est à valeurs positives et que pour tout $t > 0$, la variable e^{tX} admet une espérance. Montrer que*
$$\forall a > 0, \ \forall t > 0, \ \mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta} \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Exercice 10.14

Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Définissons la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i.$$

1. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \leq e^{\frac{x^2}{2}}$.*
2. *Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire e^{tS_n} admet une espérance puis que*
$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$
3. *Montrer que, pour tout $c > 0$,*
$$\mathbb{P}(S_n \geq c) \leq e^{-\frac{c^2}{2}}.$$
4. *En déduire que, pour tout $c > 0$,*
$$\mathbb{P}(|S_n| \geq c) \leq 2e^{-\frac{c^2}{2}}.$$

Exercice 10.15

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

1. *Montrer que, pour tout $\lambda > 0$,*
$$X \leq \lambda \mathbb{E}(X) + X \mathbb{1}_{X > \lambda \mathbb{E}(X)}.$$
2. *Supposons que $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer*

que, pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}(X > \lambda\mathbb{E}(X)) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Exercice 10.16

Soit X_1, ..., X_n des variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, L la matrice ligne dont les coefficients sont les X_j et $M = L^{\mathrm{T}}L$.

1. *Déterminer les lois des variables $\det(M)$, $\operatorname{tr}(M)$ et $\operatorname{rg}(M)$.*
2. *Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?*

Exercice 10.17

Soit X, Y des variables indépendantes de loi géométrique de paramètre p. Déterminer la probabilité que la matrice

$$\begin{bmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{bmatrix}$$

soit nilpotente.

Exercice 10.18

Soit X, Y, Z des variables indépendantes telles que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, Y une loi de Poisson de paramètre μ et Z à valeurs dans $\{\pm 1\}$ avec $p = \mathbb{P}(Z = 1)$. Notons

$$M = \begin{bmatrix} X^2 & Y^2 \\ ZY^2 & X^2 \end{bmatrix}.$$

1. *Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.*
2. *Déterminer la probabilité que les valeurs propres de M soient réelles.*

Exercice 10.19

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui admettent une espérance et telles qu'il existe une variable aléatoire X vérifiant

$$\mathbb{E}(|X_n - X|) \longrightarrow 0.$$

Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

Exercice 10.20

Soit $k \geq 1$ un entier. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $i \in [\![1,k]\!]$, une variable aléatoire $X_i^{(n)}$. Supposons que, pour tout $1 \leq i \leq k$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\big|X_i^{(n)}\big| > \varepsilon\Big) \longrightarrow 0.$$

Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq i\leq k} \big|X_i^{(n)}\big| > \varepsilon\Big) \longrightarrow 0.$$

Exercice 10.21

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires géométriques de paramètre $p \in]0,1[$ et $\alpha > 0$. Déterminer la probabilité que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha X_n}$ converge.

Exercice 10.22

Soit $n \geq 3$. Une urne contient 2 boules colorées et $n-2$ boules blanches. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.

1. *Déterminer la loi de la variable aléatoire T_1 égale au numéro du tirage de la première boule colorée.*
2. *Déterminer la loi de la variable aléatoire T_2 égale au numéro du tirage de la seconde boule colorée.*

Exercice 10.23

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Tirons une poignée de boules (les 2^n poignées sont équiprobables) et notons X la somme des valeurs des boules extraites. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 10.24

Soit $m \geq 1$. Une urne contient m boules numérotées de 1 à m. On tire avec remise des boules dans cette urne et on note U_i le numéro de la boule issue du i-ième tirage. On associe à la suite de variables aléatoires $(U_i)_{i\geq 1}$ la variable aléatoire J définie par

$$J = \min\{i \geq 1,\ U_i \neq U_{i+1}\}.$$

1. *Déterminer la loi de J.*

   Considérons maintenant une suite $(J_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que J et définissons une nouvelle variable aléatoire par

$$M_n = \max(J_1, \ldots, J_n).$$

2. *Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$,*

$$\mathbb{P}(M_n \leq k) = \left(1 - \frac{1}{m^k}\right)^n.$$

3. *Calculer la limite de $\mathbb{P}(M_{m^k} = k)$ lorsque $k \to \infty$.*

Exercice 10.25

Soit $s > 1$ et $\mathbb{P}$ la probabilité sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \qquad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}.$$

Pour tout nombre premier p, on définit une variable aléatoire $X_p : n \mapsto v_p(n)$ (où, rappelons-le, $v_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n).

1. *Montrer que, pour tout $p \in \mathcal{P}$, $X_p + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.*
2. *Montrer que les variables aléatoires $(X_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendantes.*
3. *En déduire l'identité suivante*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Exercice 10.26

Posons sur une table n jetons bicolores blanc/rouge. avec initialement m faces rouges visibles. On choisit successivement deux jetons au hasard : s'ils sont de couleurs différentes, on retourne le second choisi. Déterminer la loi de la variable X_k égale au nombre de faces rouges visibles après k « tirages ».

Exercice 10.27

Soit X, Y, Z des variables aléatoire discrètes indépendantes de même loi à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Supposons que $2X$ et $Y + Z$ suivent la même loi. Le but de cet exercice est de montrer que X est une variable aléatoire certaine.

1. *Supposons dans cette question que X admet un moment d'ordre 2. Montrer que X est une variable aléatoire certaine.*

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
2. *Supposons dans cette question que*

$$\inf\{x \geq 0,\ F(x) > 0\} = 0.$$

   (a) *Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) \in \{0, 1\}$.*
   (b) *Supposons que F n'est pas continue en 0. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.*
   (c) *Supposons que F est continue en 0. Montrer que $F(x) \leq 2F(x)F(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis conclure.*
3. *Traiter le cas général.*

11 – Espaces préhilbertiens

Exercice 11.1

Soit E un espace préhilbertien réel, a, $b \in E$ et φ l'application définie, pour $x \neq 0_E$, par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\|x\|^2}\langle x|a\rangle\langle x|b\rangle.$$

Calculer $\max\{\varphi(x),\ x \neq 0_E\}$.
Indication : poser $u = a + b$ et $v = a - b$.

Exercice 11.2

Soit E un espace préhilbertien réel, f, g des applications de E dans E telles que

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle.$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes.

Exercice 11.3

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle = 0$. Montrer que

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im}\ u.$$

Exercice 11.4

Soit E un espace préhilbertien réel, une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$.

1. *Supposons E de dimension finie. Montrer l'équivalence entre les propriétés*

$$\|x_n - x\| \to 0,$$

et

$$\forall y \in E, \qquad \langle x_n - x|y\rangle \to 0.$$

2. *Montrer que l'équivalence ne demeure pas en dimension infinie.*

Exercice 11.5

Soit f_1, ..., f_n des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable sur I, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$[A]_{i,j} = \int_I f_i(t)f_j(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que l'application $(X, Y) \mapsto X^{\mathrm{T}}AY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 11.6

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tous P, $Q \in E$, posons

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. *Justifier que $\langle\ |\ \rangle$ définit bien un produit scalaire sur E.*
2. *Montrer que les polynômes de Tchebytchev forment une base orthogonale de E.*
3. *Montrer que les polynômes de Tchebytchev sont scindés à racines simples dans $[-1, 1]$.*

Exercice 11.7

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$$

et le sous-espace

$$F = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

1. *Déterminer une base orthonormée de F.*
2. *En déduire la distance à F de la matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 11.8

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B).$$

1. *Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\langle S|A\rangle = 0$.*
2. *Calculer, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$\inf\left\{\sum_{i,j}([M]_{i,j} - [S]_{i,j})^2,\ S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right\}.$$

Exercice 11.9

Soit a_0,..., $a_n \in \mathbb{R}$. Posons, pour tous P, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a_0,..., a_n pour que $\langle\ |\ \rangle$*

soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Calculer la distance de X^n au sous-espace

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}.$$

Exercice 11.10

Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Notons U l'espace des $f \in E$ telles que $f(0) = f(1) = 0$ et V l'espace des fonctions $f \in E$ telle que $f'' = f$.

1. Montrer que U et V sont supplémentaires orthogonaux dans E.
2. Préciser la projection orthogonale sur V.
3. Notons, pour a, $b \in \mathbb{R}$,

$$E_{a,b} = \{f \in E,\ f(0) = a,\ f(1) = b\}.$$

Calculer

$$\inf\left\{\int_0^1 f(t)^2 + f'(t)^2\,\mathrm{d}t,\ f \in E_{a,b}\right\}.$$

Exercice 11.11

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall P, Q \in E, \qquad \langle P|Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Déterminer la distance de $X^3 + X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel

$$F = \{P \in E,\ \langle X^2 - 1|P'\rangle = \langle X|P\rangle\}.$$

Exercice 11.12

Calculer la borne inférieure de l'ensemble

$$\left\{\int_{-1}^1 (t^4 - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t,\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 11.13

Soit E un espace euclidien et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs telle que

$$\forall i \neq j,\ \langle x_i|x_j\rangle < 0.$$

Montrer que $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre.

Exercice 11.14

Soit E un espace euclidien. La matrice de Gram des vecteurs x_1, ..., x_n est la matrice

$$G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i|x_j\rangle)_{i,j\in[\![1,n]\!]}.$$

1. Montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si, la matrice $G(x_1, \dots, x_n)$ est inversible.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale. Montrer que

$$\det G(x_1, \dots, x_n) = [\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)]^2.$$

3. Soit F un sous-espace de E de base $(x_1, \dots, x_p)$ et $x \in E$. Montrer que

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}.$$

Exercice 11.15

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Notons pour tout $k \leq n$, $P_k = ((X^2 - 1)^k)^{(k)}$ puis $(B_0, \dots, B_n)$ la base orthonormalisée par l'algorithme de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de E.

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E.
2. Montrer que, pour tout $k \leq n$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $P_k = \lambda_k B_k$.

Exercice 11.16

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base, alors pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de vecteurs de E telle que

$$\forall i, j \leq n, \qquad [M]_{i,j} = \langle e_i|f_j\rangle.$$

2. Étudier la réciproque.

Exercice 11.17

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthogonale.

Exercice 11.18

Soit E un espace euclidien.

1. *Montrer qu'un projecteur p de E est orthogonal si, et seulement si,*
$$\forall x \in E, \qquad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$
2. *Soit p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q = q \circ p$.*
3. *Soit p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que les valeurs propres de $p \circ q$ appartiennent à $[0, 1]$.*

Exercice 11.19

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par
$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t\,.$$
Fixons $A \in E$ et considérons l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $P \in E$, $u(P)$ désigne le reste dans la division euclidienne de P par A.

1. *Montrer que u est un projecteur.*
2. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que u soit un projecteur orthogonal.*

Exercice 11.20

Soit E un espace euclidien, p et q des projecteurs orthogonaux. Montrer que le polynôme caractéristique de $p + q$ est scindé et que ses racines appartiennent à $[0, 2]$.

Exercice 11.21

Soit E un espace euclidien de base orthonormée $\mathcal{B}$, F un sous-espace de base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ et p la projection orthogonale sur F. Montrer que
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(e_k)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(e_k)^{\mathrm{T}}.$$

Exercice 11.22

Soit E un espace euclidien, F, G deux sous-espaces. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si, et seulement si, pour tout $x \in E$,
$$\|x\|^2 = d(x, F)^2 + d(x, G)^2.$$

12 – Endomorphismes d'un espace euclidien

Exercice 12.1

Soit E un espace euclidien et $a \in E$ de norme 1. Posons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_\alpha : x \mapsto x + \alpha\langle x|a\rangle a.$$

1. *Justifier que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_\alpha \in \mathcal{L}(E)$.*
2. *Calculer, pour tous α, $\beta \in \mathbb{R}$, $u_\alpha \circ u_\beta$.*
3. *Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que u_α est un automorphisme.*
4. *Préciser les éléments propres de u_α.*

Exercice 12.2

Soit E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u : E \to E$ l'application

$$u : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k.$$

1. *Montrer que u est un endomorphisme de E. Est-il bijectif ?*
2. *Montrer que u est symétrique.*
3. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit un projecteur.*

Exercice 12.3

Soit E un espace euclidien. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout sous-espace F de E, $u(F^\perp) = u(F)^\perp$.

Exercice 12.4

Déterminer a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que la matrice

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & a & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ c & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

soit une matrice orthogonale.

Exercice 12.5

Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$; notons

$$\sigma_1 = a + b + c$$
$$\sigma_2 = ab + bc + ca$$

et

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}.$$

Montrer que A est orthogonale si, et seulement si, $\sigma_2 = 0$ et $\sigma_1 \in \{\pm 1\}$.

Exercice 12.6

Déterminer les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures.

Exercice 12.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{O}_{n+p}(\mathbb{R}).$$

Montrer que $\det(A)^2 = \det(D)^2$.

Exercice 12.8

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A, $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour que

$$\frac{1}{5}A + \frac{5}{6}B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 12.9

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer les inégalités suivantes

1. $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}| \le n^{\frac{3}{2}}$.
2. $\displaystyle\left|\sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}\right| \le n$.

Exercice 12.10

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Im}\,(A - \mathrm{I}_n).$$

Exercice 12.11

Soit F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E tels que $\dim F = \dim G$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $u(F) = G$.

Exercice 12.12

Soit E un espace euclidien, $p \ge 1$, x_1, ..., x_p, y_1,..., $y_p \in E$.
Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ telle que, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, $u(x_i) = y_i$ si, et seulement si,

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \qquad \langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle.$$

Exercice 12.13

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que la multiplicité d'une valeur propre dans le polynôme caractéristique de u est la dimension du sous-espace propre associé.

Exercice 12.14

Soit E un espace euclidien et $u : E \to E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

1. *Montrer que l'image d'une base orthonormée de E par u est une base orthonormée de E.*
2. *Montrer que u est un endomorphisme.*

Exercice 12.15

Soit E un espace euclidien, H_1, H_2 deux hyperplans, σ_1 et σ_2 les réflexions associées. Notons $H_3 = \sigma_2(H_1)$ et σ_3 la réflexion associée. Montrer que

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_3.$$

Exercice 12.16

Soit a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une matrice $S \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ tel que

$$S \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

où c est un réel à préciser.

Exercice 12.17

Reconnaître les isométries de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exercice 12.18

Déterminer les rotations de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est de la forme

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & a & b \\ b & 2 & a \\ a & b & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 12.19

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe dirigé par $(1, 1, 1)$.

Exercice 12.20

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E$. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout $x \in E$, la famille $(x \wedge a, u(x))$ est liée.

Exercice 12.21

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $A^{\mathrm{T}} A = A A^{\mathrm{T}}$. Montrer que $A = 0_n$.

Exercice 12.22

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer que, pour tout i, $[S]_{i,i} \geq 0$.

Exercice 12.23

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer que

$$\det S \leq \left(\frac{\operatorname{tr} S}{n} \right)^n.$$

Exercice 12.24

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\operatorname{tr}(SP) \leq \operatorname{tr} S.$$

Exercice 12.25

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que

$$\operatorname{tr}(S)^2 \leq \operatorname{tr}(S^2) \operatorname{rg} S.$$

Exercice 12.26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$X^{\mathrm{T}} X = n, \ X^{\mathrm{T}} A X = \operatorname{tr} A.$$

Indication : introduire la partie symétrique de A.

Exercice 12.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les propositions

— *A admet une famille libre de k vecteurs* propres,

— *il existe une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives de rang k telle que $AS = SA^{\mathrm{T}}$.*

Exercice 12.28

Soit E un espace euclidien, $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E et $S^+(E)$ l'ensemble des éléments de E dont les valeurs propres sont toutes positives.

1. *Montrer que si $u \in S(E)$, $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.*
2. *Montrer que si $u \in S^+(E)$, alors il existe $v \in S^+(E)$ tel que $u = v^2$.*
3. *Soit $u, v \in S^+(E)$. Montrer que*

$$\operatorname{Ker}(u+v) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v,$$
$$\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v.$$

Exercice 12.29

Une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

1. *Montrer qu'une matrice A symétrique est définie positive si, et seulement si, pour toute colonne X non nulle, $X^{\mathrm{T}}AX > 0$.*
2. *Soit A symétrique définie positive. Montrer que A^{-1} est symétrique définie positive puis que, pour toute colonne X,*

$$\|X\|^4 \leq X^{\mathrm{T}}AX.X^{\mathrm{T}}A^{-1}X.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 12.30

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. Montrer que u est k-lipschitzien si, et seulement si, toutes les valeurs propres de u sont de valeur absolue inférieure ou égale à k.

Exercice 12.31

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres et $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.

1. *Posons $V_k = \operatorname{Vect}(X_1 \ldots, X_k)$. Montrer que*

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \max\{X^{\mathrm{T}}AX,\ X \in V_k,\ \|X\| = 1\}\\ &= \min\{X^{\mathrm{T}}AX,\ X \in V_k^{\perp},\ \|X\| = 1\}\end{aligned}$$

2. *Notons $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k. Montrer que*

$$\lambda_k = \min_{V \in \mathcal{E}_k} \max\{X^{\mathrm{T}}AX,\ X \in V,\ \|X\| = 1\}.$$

Exercice 12.32

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Notons $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite $(a_{i,j})_{i,j \leq n-1}$. Montrer que si A admet une valeur propre de multiplicité au moins 2, alors A et B admette une valeur propre commune.

Exercice 12.33

Notons, pour toute matrice M,

$$\varphi_M : X \mapsto X^{\mathrm{T}}MX.$$

Montrer que toute matrice M se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A puis que $\varphi_M = \varphi_S$.

Exercice 12.34

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres strictement positives. Montrer que $A + S$ est inversible.

Exercice 12.35

1. *Montrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle sont imaginaires pures.*
2. *Montrer que l'application*

$$A \mapsto (\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n - A)^{-1}$$

réalise une bijection de l'espace des matrices antisymétriques réelles dans l'ensemble des matrices orthogonales n'admettant pas 1 comme valeur propre.

Exercice 12.36

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si, et seulement si, pour toute matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle.

Exercice 12.37

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et inversible.

1. *Montrer que n est pair.*
2. *Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs*

avec des blocs de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 12.38

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $A^{\mathrm{T}} = A^2$.

1. *Diagonaliser* $A^{\mathrm{T}}A$.
2. *Montrer que* A *est orthogonalement semblable à l'une des matrices suivantes :* 0_2, I_2, $E_{1,1}$,

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 12.39

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *symétrique.*

1. *Supposons qu'il existe* $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *antisymétrique telle que* $U + V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   (a) *Montrer que* $UV = VU$ et $U^2 - V^2 = \mathrm{I}_n$.
   (b) *Montrer que les valeurs propres de* U *appartiennent à* $[-1, 1]$ *puis que tout sous-espace propre associé à une valeur propre dans* $]-1, 1[$ *est de dimension paire.*
2. *Étudier la réciproque.*

13 – Espaces vectoriels normés

Exercice 13.1

Montrer que l'application sur $\mathbb{R}[X]$ *définie par*

$$P \mapsto \|P\| = \sup\{|P(t) - P'(t)|,\ t \in [0,1]\}$$

est une norme.

Exercice 13.2

1. *Justifier que l'ensemble* E *des fonctions* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *lipschitziennes est un espace vectoriel.*
   Posons, pour $f \in E$,
   $$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \neq y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|,$$
   $$N(f) = |f(0)| + \sup_{x \neq 0}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|.$$
2. *Montrer que* $\|\ \|$ *et* N *sont des normes sur* E.

Exercice 13.3

Soit E *l'espace des fonctions* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *vérifiant* $f(0) = f(1) = 0$. *Posons, pour tout* $f \in E$, $N(f) = \|f''\|_\infty$.

1. *Montrer que* N *est une norme sur* E.
2. *Comparer* N *et* $\|\ \|_\infty$.

Exercice 13.4

Soit E *l'espace des fonctions* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *vérifiant* $f(0) = f(1) = 0$.

1. *Montrer que* $\|f\| = \|f'' + 2f' + f\|_\infty$ *définit une norme sur* E.
2. *Montrer qu'il existe* $C > 0$ *tel que*
   $$\forall f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leq C\|f\|.$$

Exercice 13.5

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, *posons*

$$\theta_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n \,\mathrm{d}t\,.$$

1. *Justifier, pour tout* $P \in \mathbb{R}[X]$, *l'existence de*
   $$N(P) = \sup\{|\theta_n(P)|,\ n \in \mathbb{N}\}.$$
2. *Montrer que* N *est une norme sur* $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13.6

Soit E *un espace vectoriel muni d'une norme* N. *Posons, pour tout* $x = (x_1, x_2) \in E^2$,

$$N'(x) = \max\{N(x_1), N(x_2), N(x_1 - x_2)\}.$$

Montrer que N' *est une norme sur* E^2.

Exercice 13.7

Soit f_1, ..., f_n *des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que l'application*

$$x \mapsto \Big\|\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\Big\|_\infty$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$ *si, et seulement si, la famille* $(f_1, \ldots, f_n)$ *est libre.*

Exercice 13.8

Soit E *un espace vectoriel normé et* $K \subset E$ *une partie convexe, bornée, symétrique par rapport à l'origine et telle que* 0_E *soit intérieur à* K. *Pour* $x \in E$, *posons*

$$N(x) = \inf\Big\{|\lambda|,\ \frac{1}{\lambda}x \in K\Big\}.$$

Montrer que N *est une norme sur* E.

Exercice 13.9

Soit E *un espace vectoriel normé,* x, $x' \in E$, r, $r' > 0$. *Montrer que l'ensemble* $\mathcal{B}(x,r) + \mathcal{B}(x',r')$ *défini comme*

$$\{y + y',\ y \in \mathcal{B}(x,r), y' \in \mathcal{B}(x',r')\}$$

est une boule dont on précisera centre et rayon.

Exercice 13.10

Soit E *un espace vectoriel normé,* $x \in E$, $r > 0$. *Déterminer* $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}(x,r))$.

Exercice 13.11

Soit E *un espace vectoriel muni de deux normes* N *et* N'.

1. *Montrer que si* $\mathcal{B}(0_E,1) \subset \mathcal{B}'(0_E,1)$, *alors*
   $$\forall x \in E, \qquad N'(x) \leq N(x).$$
2. *Soit* r, $r' > 0$. *Traduire l'inclusion*
   $$\mathcal{B}(0_E,r) \subset \mathcal{B}'(0_E,r')$$

en une inégalité sur les normes.

Exercice 13.12

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 ayant la même boule unité ouverte. Montrer que $N_1 = N_2$.

Exercice 13.13

Notons, pour tout $r > 0$, $A \subset \mathbb{R}^2$ la réunion des boules fermées de centre $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ et de rayon $\frac{r}{n}$. Montrer que A est un fermé de $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, $r \geq \sqrt{2}$.

Exercice 13.14

Soit A un ouvert et B une partie quelconque d'un espace vectoriel normé. Montrer que

$$A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$$

est ouvert.

Exercice 13.15

Soit A une partie fermée de $\mathbb{R}$.

1. *L'ensemble $\{a + n,\ a \in A, n \in \mathbb{Z}\}$ est-il toujours fermé ?*
2. *Reprendre la question en ajoutant l'hypothèse A bornée.*

Exercice 13.16

Soit E un espace vectoriel normé. Pour toute partie $A \subset E$, posons

$$A^* = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ [a, x] \subset A\}.$$

1. *Montrer que si A est un fermé, alors A^* est aussi un fermé.*
2. *Trouver un contre-exemple à l'implication réciproque.*
3. *Calculer A^* pour la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |xy| < 1\}.$$

Exercice 13.17

Montrer que l'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe d'un espace vectoriel normé est convexe.

Exercice 13.18

Soit E un espace vectoriel normé. Le diamètre d'une partie $A \subset E$ bornée non vide est

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{N(x - y),\ x, y \in A\}.$$

Montrer que, pour toute partie $A \subset E$ bornée non vide, A et $\overline{A}$ ont le même diamètre.

Exercice 13.19

Soit A, B deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé E. Montrer que l'intérieur de $\overline{A}$ et l'intérieur de $\overline{B}$ sont disjoints.

Exercice 13.20

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé. Montrer que A est un ouvert si, et seulement si, A ne rencontre pas sa frontière.
Proposer une caractérisation analogue d'une partie fermée.

Exercice 13.21

Soit (u_n) une suite réelle. Une valeur d'adhérence de cette suite est un réel ℓ tel qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

1. *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est*

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n,\ n \geq k\}}.$$

2. *En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est un fermé de $\mathbb{R}$.*

Exercice 13.22

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^k \longrightarrow P,\ B^k \longrightarrow Q.$$

1. *Montrer que $P^2 = P$.*
2. *Comparer AP et PA.*
3. *Montrer que si $AB = BA$, alors $PQ = QP$.*

Exercice 13.23

Soit (A_k) une suite de matrices inversibles telles que

$$A_k \longrightarrow P,\ A_k^{-1} \longrightarrow Q.$$

Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = Q$.

Exercice 13.24

Soit A une matrice antisymétrique. Montrer que si la suite (A^k) converge, alors sa limite est la matrice nulle.

Exercice 13.25

1. *Montrer que toute matrice est limite d'une*

suite de matrices inversibles.

2. *Montrer que, pour tous A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.*

Exercice 13.26

Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Exercice 13.27

1. *Soit A, $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il toujours une fonction $\varphi : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = B$?*
2. *Reprendre la question en remplaçant le corps $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.*

Exercice 13.28

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, posons

$$N_1(P) = \sup\{|P(t)|,\ t \in [0,1]\},$$
$$N_2(P) = \sup\{|P(t)|,\ t \in [1,2]\}.$$

Considérons l'application linéaire φ de $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P(0)$.

1. *Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes.*
2. *Montrer que φ est continue pour N_1.*
3. *En introduisant les polynômes $(1 - \frac{X}{2})^n$, montrer que φ n'est pas continue pour N_2.*

Exercice 13.29

1. *Montrer que, pour tout $n > 0$, il existe une constante c_n telle que*

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad |P'(0)| \leq c_n \|P\|_{\infty,[-1,1]}.$$

2. *Montrer que $c_n \to +\infty$.*

Exercice 13.30

Soit A, B deux fermés disjoints d'un espace vectoriel normé E. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 13.31

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ si, et seulement si, il existe C tel que

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq C\|u^2(x)\|.$$

14 – Fonctions à valeurs vectorielles

Exercice 14.1

Soit E un espace euclidien, $f : [a,b] \to E$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\|f(b) - f(c)\| \leq (b-a)\|f'(c)\|.$$

Indication : on pourra introduire la fonction réelle

$$\varphi : t \mapsto \langle f(t) | f(b) - f(a) \rangle.$$

Exercice 14.2

Soit E un espace euclidien et $f : I \to E$ deux fois dérivables telle que $t \mapsto \|f(t)\|$ est constante. Montrer que $t \mapsto \langle f(t) | f''(t) \rangle$ est à valeurs négatives.

Exercice 14.3

Soit n un entier impair et $f : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 14.4

Considérons l'arc paramétré plan défini par

$$M : t \mapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right).$$

1. *Tracer le support de l'arc M.*
2. *Soit t_1, t_2, $t_3 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Montrer que les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont alignés si, et seulement si, $t_1 t_2 t_3 = -1$.*
3. *Montrer que les tangentes en trois points de M alignés recoupent le support de M en trois points alignés.*

Exercice 14.5

Tracer l'arc paramétré plan défini par

$$M : t \mapsto \left(\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t} \right).$$

Exercice 14.6

Considérons l'arc paramétré plan défini par

$$M : t \mapsto \left(t - \operatorname{th} t, \frac{1}{\operatorname{ch} t} \right).$$

1. *Tracer le support de l'arc M.*
2. *Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner les coordonnées du point $N(t)$, intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à l'arc en $M(T)$. Que remarque-t-on pour la longueur $M(t)N(t)$?*

Exercice 14.7

Déterminer les droites à la fois tangentes et normales au support de l'arc paramétré

$$M : t \mapsto (2t^3, 3t^2).$$

Exercice 14.8

Soit $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, régulier ne passant pas par 0. Supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$OM(t_0) = \min\{OM(t),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que la tangente à l'arc en t_0 est perpendiculaire à la droite $(OM(t_0))$.

Exercice 14.9

Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les « vecteurs mobiles »

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &: \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta) \\ \overrightarrow{v} &: \theta \mapsto (-\sin\theta, \cos\theta) \end{aligned}$$

1. *Calculer les dérivées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

   Soit p, q deux fonctions dérivables. Considérons l'arc paramétré

   $$M : \theta \mapsto p(\theta)\overrightarrow{u}(\theta) + q(\theta)\overrightarrow{v}(\theta).$$

2. *Déterminer à quelle condition, sur p et q, la dérivée de M est proportionnelle à $\overrightarrow{v}$.*
3. *Préciser la distance entre $M(\theta)$ et le point d'intersection de la tangente à l'arc M en θ et la droite passant par l'origine et dirigée par $\overrightarrow{u}(\theta)$.*

Exercice 14.10

Calculer la longueur des arcs paramétrés suivants :

$$\begin{aligned} M &: t \mapsto ((1+\cos^2 t)\sin t, \sin^2 t \cos t) \\ M &: t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t) \\ M &: t \mapsto \left(\int_0^t e^{-u}(1-\cos u)\,\mathrm{d}u, \int_0^t e^{-u} \sin u \,\mathrm{d}u \right) \end{aligned}$$

15 – Équations différentielles

Exercice 15.1

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 15.2

Montrer que l'équation $y'' - y = a|x| + b$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative admet des asymptotes en $\pm\infty$.

Exercice 15.3

Déterminer les solutions bornées sur $\mathbb{R}_+^*$ de

$$y' - y = \ln x.$$

Exercice 15.4

Montrer que les solutions de l'équation

$$(1-x^2)y' - xy = 1$$

sont développables en série entière.

Exercice 15.5

Déterminer la dimension de l'espace des solutions de l'équation

$$(\cos^3 x)y' + (2\sin x)y = 0.$$

Exercice 15.6

Résoudre l'équation $y'' + y = \cos^3 x$.

Exercice 15.7

Résoudre, selon la valeur de λ, l'équation

$$y'' + \lambda y' + 4y = e^x.$$

Exercice 15.8

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et (E) l'équation $y'' + y = P$.

1. *Montrer que (E) admet une unique solution polynomiale donnée par*

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x).$$

2. *En déduire toutes les solutions de (E).*

Exercice 15.9

Soit y une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$x^2 y'' - 2y = x.$$

Montrer que $z : t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle simple puis en déduire l'expression de y.

Exercice 15.10

Considérons l'équation (E) :

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. *Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, $z : x \mapsto e^{-x}y(x)$ est solution d'une équation différentielle plus simple.*
2. *Résoudre (E).*

Exercice 15.11

Résoudre l'équation

$$2x(1-x)y'' + (2-5x)y' - y = 0.$$

Indication : on pourra chercher une solution développable en série entière.

Exercice 15.12

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + f(-x) = \cos x + \sin x.$$

Exercice 15.13

Considérons l'endomorphisme u de l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ défini par

$$u(f) : x \mapsto \int_0^1 \inf\{t, x\} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 15.14

Considérons l'endomorphisme u de l'espace des fonctions de classe $^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défini par

$$u(f) : x \mapsto f'(x) + xf(x).$$

Déterminer les éléments propres de u et de u^2.

Exercice 15.15

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = x+\cos t \end{cases}$$

Exercice 15.16

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -x+3y-2z \\ y' = -3x+5y-2z \\ z' = -3x+4y-z \end{cases}$$

Exercice 15.17

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2y+2z \\ y' = -x+2y+2z \\ z' = -x+y+3z \end{cases}$$

Exercice 15.18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible et X une solution de l'équation $X' = AX$. Montrer qu'il existe un hyperplan H de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X(t) \subset H$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.19

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'ordre p et $t \mapsto X(t)$ une solution de l'équation $X' = NX$. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall t, \qquad X(t) \in X_0 + \operatorname{Ker} N^{p-1}.$$

Exercice 15.20

Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons l'application $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout k, la k-ième colonne de M est solution du système différentiel

$$Y' = AY, \qquad Y(0) = E_k.$$

1. *Justifier que M est définie sur $\mathbb{R}$ puis que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det M(t) \neq 0$.*
2. *Montrer que $t \mapsto \det M(t)$ vérifie une équation différentielle.*
3. *Calculer $\det M(t)$ en fonction de $\operatorname{tr}(A)$.*

Exercice 15.21

Soit f dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f + f' \leq 1$. Déterminer le meilleur majorant pour $f(1)$.

Exercice 15.22

Soit a, b continues, y et z des fonctions telles que

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$
$$z'(x) \leq a(x)z(x) + b(x)$$

Montrer que si, $y(0) = z(0)$, alors $y(x) \geq z(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 15.23

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f'' + 2f' + f \geq 0.$$

Montrer que f est à valeurs négatives.

Exercice 15.24

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues et $A \geq 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

En introduisant la fonction

$$\varphi : x \mapsto A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) \leq A \exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

16 – Fonctions de plusieurs variables

Exercice 16.1

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 16.2

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(C)$ est un intervalle.

Exercice 16.3

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue.*
2. *La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?*
3. *La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?*

Exercice 16.4

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 y}{\sqrt{x^6+y^4}} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de f.

Exercice 16.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que g est continue.*
2. *Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Exercice 16.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} g_1 &: (x, y) \mapsto f(y, x) \\ g_2 &: (x, y) \mapsto f(x + y, x - y) \end{aligned}$$

Exercice 16.7

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $g''(0)$ par

$$g : x \mapsto f(0, x) + f(x^2, x).$$

Exercice 16.8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(x + \lambda, y + \lambda) = f(x, y).$$

Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Exercice 16.9

Chercher les éventuels extrema de

$$f : (x, y) \mapsto \sin x + \sin y - \sin(x + y).$$

Exercice 16.10

Chercher les éventuels extrema sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de

$$f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}.$$

Exercice 16.11

Chercher les éventuels extrema de

$$f : (x, y) \mapsto x^4 y^3 + \ln(1 + y^4).$$

Exercice 16.12

Chercher les éventuels extrema de

$$f : (x, y) \mapsto x^y - xy.$$

Exercice 16.13

Soit $S > 0$. Considérons

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{k=1}^{n} x_k = S\}$$

et la fonction

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

Déterminer les points de A où $f_{|A}$ est maximale.

Exercice 16.14

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto (x - y^2)(x - 2y^2).$$

1. *Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0, 0)$ admet un minimum en ce point.*
2. *La fonction f admet-elle un minimum en $(0, 0)$?*

Exercice 16.15

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ engendré par les fonctions

$$f_{i,j} : (x, y) \mapsto x^i y^j$$

où i, $j \in \mathbb{N}$. Posons

$$\Phi : f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

1. *Montrer que Φ est un endomorphisme de E.*
2. *Montrer que la famille $(f_{i,j})$ est libre.*
3. *Déterminer $\operatorname{Ker} \Phi$ puis montrer que*

$$E = \operatorname{Ker} \Phi \oplus F$$

avec $F = \{(x, y) \mapsto xyf(x, y),\ f \in E\}$.

Exercice 16.16

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Exercice 16.17

Déterminer une équation aux dérivées partielles satisfaites par toutes les fonctions $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ s'écrivant sous la forme

$$(x, y) \mapsto g\left(\frac{x}{y}\right)$$

avec $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 16.18

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Indication : on pourra poser $g : (u, v) \mapsto f(u, uv)$.

Exercice 16.19

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2y}{x}\frac{\partial f}{\partial y} = -f.$$

Indication : on pourra poser $g : (u, v) \mapsto f(u, u^2 v)$.

Exercice 16.20

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1. *Montrer que l'application*

$$g : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}.$$

2. *Montrer que la fonction*

$$\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ puis calculer sa dérivée.

3. *En déduire que si f admet un minimum local en $(0, 0)$, alors f est localement constante.*

Exercice 16.21

Trouver les fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ telles qu'il existe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2xz,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = f(y)g(z),$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{2}.$$

Exercice 16.22

1. *Déterminer les fonctions $f : (\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ telles*

que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x-y.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(x-y)y' + x + y = 0.$$

Exercice 16.23

1. Déterminer les fonctions $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\ln x + y - 1}{x^2 y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\ln x}{xy^2}.$$

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(x \ln x)y' + (lnx + y - 1)y = 0.$$

Exercice 16.24

Soit Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x^2+3yz-4z = 1$. Déterminer les plans tangents à Σ contenant la droite d'équations

$$y = 2, \ z = 4x.$$

Exercice 16.25

Soit Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2-y^2-z^2 = 1$. Déterminer les points de Σ d'où le plan tangent est parallèle à la droite d'équations

$$y = -2x, \ z = 0.$$

Exercice 16.26

Soit Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2-y^2-z^2 = 1$.

1. Montrer que la droite d'équations

$$\begin{cases} x &= az+b \\ y &= cz+d \end{cases}$$

est incluse dans Σ si, et seulement si, la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

est orthogonale.

2. Montrer que par tout point de Σ passe deux droites incluses dans Σ.

Exercice 16.27

Soit Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $xyz = 1$.

1. Soit $\mathcal{P}$ un plan tangent en un point M de Σ, A, B, C ses intersections avec les axes. Montrer que la quantité

$$\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$$

ne dépend pas du choix du point M.

2. Décrire l'intersection de Σ avec les plans parallèles aux plans de coordonnées puis en déduire l'allure de Σ.