Cahier d'exercices

PSI** 20/21

Si vous détectez une erreur d'énoncé, merci d'avertir vos camarades, de la signaler en classe ou à l'adresse

roger.mansuy@gmail.com

Voici quelques consignes génériques.

► Avant d'aborder un exercice, on vérifie que l'on est au point sur le cours : les énoncés avec l'ensemble de leurs hypothèses, les méthodes pour établir les différentes propriétés.

► Avant de quitter un exercice, on dresse un bilan de nos tentatives (fructueuses ou non) afin de gagner en expérience pour les prochains exercices.

► La signalétique de difficulté (☕, ☕☕ ou ☕☕☕) est purement indicative. Merci de ne pas indexer votre stratégie de travail sur celle-ci.

Roger MANSUY

1 – Révisions d'algèbre linéaire

Noyau, image

Exercice 1.1 (☕)

Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u^{-1}(u(F)) = F + \operatorname{Ker} u$.

Exercice 1.2 (☕)

Soit E un espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u(F) \subset u(G)$ si, et seulement si, $F + \operatorname{Ker} u \subset G + \operatorname{Ker} u$.

Exercice 1.3 (☕)

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \neq \mu$ des scalaires. Montrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})^2$ et $\operatorname{Ker}(u - \mu \mathrm{Id})^2$ sont en somme directe.

Calcul et utilisation de la dimension

Exercice 1.4 (☕☕)

Considérons trois bases $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_n)$, et $(g_1, \dots, g_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Fixons i, $j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i + j \leq n + 1$ et posons $E = \operatorname{Vect}(e_i, \dots, e_n)$, $F = \operatorname{Vect}(f_j, \dots, f_n)$ et $G = \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_{i+j-1})$. Montrer que $E \cap F \cap G$ n'est pas le sous-espace nul.

Exercice 1.5 (☕)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0\}$.

1. *Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Préciser sa dimension.*
2. *Déterminer $A \cap \operatorname{Vect}(1, (X-1)^p)$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.*
3. *En déduire une base de A.*

Exercice 1.6 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels. À quelle condition existe-t-il $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = F_1$ et $\operatorname{Im} u = F_2$?

Exercice 1.7 (☕☕)

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Montrer que l'ensemble des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la famille (AX, X) est liée est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$; préciser sa dimension.

Exercice 1.8 (☕)

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer $\dim\{v \in \mathscr{L}(E,F),\ v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,F)}\}$.

Exercice 1.9 (☕)

Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\dim u(F) \geq \dim F - \dim \operatorname{Ker} u$.

Exercice 1.10 (☕☕)

Soit $V_1,\dots,V_p$ des sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $\sum_{k=1}^{p}\dim V_k > (p-1)\dim E$.

1. *Montrer que l'application*

$$u : \begin{cases} V_1\times\cdots\times V_p & \to & E^{p-1} \\ (x_1,\dots,x_p) & \mapsto & (x_1-x_2, x_2-x_3,\dots,x_{p-1}-x_p) \end{cases}$$

   n'est pas injective.

2. *En déduire que l'intersection $\cap_{k=1}^{p} V_k$ n'est pas le sous-espace nul.*

Exercice 1.11 (☕)

Soit $a_0,\ a_1,\dots,\ a_n\in\mathbb{C}$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes

— $a_0\neq 0$,

— $\forall Q\in\mathbb{C}_n[X], \exists P\in\mathbb{C}_n[X],\ Q=\sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$.

Exercice 1.12 (☕)

Déterminer les $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tels que $u : P\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k)$ soit un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 1.13 (☕☕)

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0)=0$ et $P=Q(X)-Q(X-1)$.

Exercice 1.14 (☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x\in E$, il existe $n\in\mathbb{N}$ vérifiant $u^n(x)=0_E$. Montrer que u est nilpotent.

Exercice 1.15 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n>0$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi : u\mapsto (u(e_1),\dots,u(e_n))$ soit un isomorphisme entre $\mathscr{L}(E)$ et E^n.

Hyperplans, formes linéaires

Exercice 1.16 (☕☕)

Soit $H_1,\dots,H_p$ des hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. *Montrer que $\dim\cap_{k=1}^{p} H_k\geq n-p$.*
2. *Peut-on avoir une inégalité stricte pour des hyperplans deux à deux distincts ?*

Exercice 1.17 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Montrer que F est l'intersection de $n-p$ hyperplans.

Exercice 1.18 (☕)

Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi : M\mapsto \mathrm{tr}(AM)$.

Exercice 1.19 (☕)

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter la dimension du sous-espace $\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(M)=\mathrm{tr}(AM)=0\}$.

Exercice 1.20 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, φ une forme linéaire non nulle sur E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est stable par u si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ u = \lambda\varphi$.

Exercice 1.21 (☕☕☕)

Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toutes matrices A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. Montrer que φ est colinéaire à tr.

Projecteurs

Exercice 1.22 (☕)

Soit p et q deux projecteurs de même image F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est un projecteur d'image F.

Exercice 1.23 (☕)

Soit E un espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E qui commutent. Montrer que $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 1.24 (☕☕)

1. *Déterminer les droites vectorielles stables par un projecteur.*
2. *Soit E un espace vectoriel de dimension impaire, p et q deux projecteurs de E. Montrer qu'il existe une droite à la fois stable par p et q.*

Exercice 1.25 (☕☕☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ des sous-espaces de $\mathscr{L}(E)$ tels que $\mathscr{L}(E) = \mathscr{U} + \mathscr{V}$ tels que

$$\forall u \in \mathscr{U},\ \forall v \in \mathscr{V}, \qquad u \circ v = -v \circ u.$$

Considérons des endomorphismes $p \in \mathscr{U}$ et $q \in \mathscr{V}$ tels que $\mathrm{Id} = p + q$.

1. *Montrer que p et q sont des projecteurs.*
2. *Justifier que* $\dim \mathscr{V} \leq (n - \operatorname{rg} p)^2$ *puis* $\dim \mathscr{U} \leq (\operatorname{rg} p)^2$.
3. *En déduire les sous-espaces $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$.*

Exercice 1.26 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. *Montrer que, pour tout projecteur p de E,* $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.
   Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et m un entier non nul tel que $u^m = \mathrm{Id}_E$.
2. *Montrer que l'endomorphisme $p = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k$ est un projecteur de E.*
3. *En déduire que* $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{tr}(u^k) = \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$.

Calcul matriciel

Exercice 1.27 (☕)

Montrer que toute matrice peut s'écrire comme somme de deux matrices inversibles.

Exercice 1.28 (☕)

Calculer l'inverse de la matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.29 (☕☕)

Soit A une matrice inversible telle que $A + A^{-1} = 2\mathrm{I}_n$. Calculer, pour tout k, $A^k + A^{-k}$.

Exercice 1.30 (☕☕)

Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices nilpotentes qui commutent deux à deux.

1. *Montrer que, pour tout $k \leq n$, $\mathrm{rg}(A_1 \cdots A_k) \leq n - k$.*
2. *Calculer le produit $A_1 \cdots A_n$.*

Exercice 1.31 (☕☕)

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \alpha_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

et $\mathscr{C}_A$ le sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formés des matrices commutant avec A.

1. *Montrer l'injectivité de l'application linéaire*

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_A & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ (m_{i,j})_{i,j} & \mapsto & (m_{i,n})_i \end{array} \right.$$

2. *En déduire que, pour tout $M \in \mathscr{C}_A$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $M = P(A)$.*

Exercice 1.32 (☕☕)

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) \neq 0$ et $AB = P(A)$. Montrer que $AB = BA$.

Similitude

Exercice 1.33 (☕)

Exhiber une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 qui n'est pas semblable à $E_{1,1}$.

Exercice 1.34 (☕)

Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.35 (☕☕)

Montrer qu'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente est semblable à l'une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.36 (☕☕)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang k telle que $A^2 = 0_n$. Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.37 (☕☕)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que $u^2 = -\mathrm{Id}$.

1. *Calculer $(\det u)^2$. Que peut-on en déduire sur la valeur de d ?*
2. *Donner un tel endomorphisme u en dimension $d = 2$.*
3. *Montrer que, pour $d = 2$, les matrices associées aux endomorphismes u sont semblables à la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Généraliser le résultat en dimension d quelconque.*

Exercice 1.38 (☕☕)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension et $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que $u^2 + u + \mathrm{Id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. *Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $(x, u(x))$ est une famille libre.*
2. *Soit $x, y \in E$ tel que la famille $(x, u(x), y)$ est libre. Montrer que la famille $(x, u(x), y, u(y))$ est libre.*

3. *Supposons* $\dim E = 4$. *Montrer que toute matrice de* u *est semblable à*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.39 (☕☕☕)

1. *Soit* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *des complexes deux à deux distincts et* $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
   Déterminer le noyau puis l'image de l'endomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$$

2. *Soit* $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice de trace nulle.*
   (a) *Montrer que* M *est semblable à une matrice à diagonale nulle.*
   (b) *Montrer qu'il existe* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *telles que* $M = AB - BA$.

Déterminants

Exercice 1.40 (☕)

Soit $n < m$, $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *et* $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. *Calculer* $\det(AB)$.

Exercice 1.41 (☕)

Déterminer selon les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ *le rang de la matrice* $M_a = \mathrm{I}_n + aJ$ *où*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.42 (☕☕)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $c \neq 1$ *et*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c & \cdots & c & x_n \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que l'application* $x \mapsto \det(A + xJ)$ *est polynomiale de degré au plus 1.*
2. *En déduire* $\det A$.

Exercice 1.43 (☕☕☕)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et $a_0, \dots, a_n$ des complexes deux à deux distincts.

1. *Justifier que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.*
2. *Montrer que $(P(X+a_0), P(X+a_1), \dots, P(X+a_n))$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.*
   Indication : on pourra se ramener au déterminant de Vandermonde.

Exercice 1.44 (☕☕)

Soit a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Décomposer la matrice*
$$P = \begin{pmatrix} aM & bM \\ cM & dM \end{pmatrix}$$
   comme produit de deux matrices, la seconde étant diagonale par blocs.
2. *En déduire* $\det(P)$.

Exercice 1.45 (☕)

Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 1.46 (☕☕☕)

1. *Calculer le polynôme caractéristique de la matrice suivante :*
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
2. *Rappeler que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.*
3. *Soit U l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients complexes et φ l'application de U dans U définie par*
$$\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k) \mapsto \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k^2).$$
   Déduire des questions précédentes que, pour tout $P \in U$ à coefficients entiers, $\varphi(P)$ est également à coefficients entiers.

Exercice 1.47 (☕☕)

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que la famille (AX, BX) soit liée.

2 – Réduction des endomorphismes

Diagonalisabilité de (petites) matrices

Exercice 2.1 (☕)

Déterminer parmi les matrices suivantes celles qui sont diagonalisables (avec un minimum de calculs)

$$\begin{pmatrix}1&4&6\\0&2&5\\0&0&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.2 (☕)

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Étudier la diagonalisabilité et préciser les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix}\alpha&0&\beta\\0&\alpha+\beta&0\\\beta&0&\alpha\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.3 (☕)

Étudier la diagonalisabilité des matrices de la forme $\alpha \mathrm{I}_3 + \beta A$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et

$$A = \begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.4 (☕)

Déterminer les $\alpha \in \mathbb{C}$ pour lesquels la matrice

$$\begin{pmatrix}0&1&\alpha\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Exercice 2.5 (☕☕)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires a, b, c et d pour la diagonalisabilité de la matrice

$$\begin{pmatrix}a&0&0&0\\1&b&0&0\\0&1&c&0\\0&0&1&d\end{pmatrix}.$$

Indication : on pourra montrer que les sous-espaces propres de cette matrice sont de dimension 1.

Exercice 2.6 (☕☕)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les scalaires a, b, c, d, e et f pour la diagonalisabilité de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 2 & 0 \\ c & e & f & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.7 (☕☕)

Déterminer les $a \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Exercice 2.8 (☕)

Étudier la diagonalisabilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ i & 1 & -i & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.9 (☕☕)

Soit $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & c & c \\ 1 & 1 & c & c \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.10 (☕)

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que A n'est pas diagonalisable. Trigonaliser A.*
2. *Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer que les valeurs propres de M appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$.*
3. *Résoudre l'équation $M^2 = A$.*

Exercice 2.11 (☕☕)

Notons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} -t & -1 & t \\ -1 & 1-t & 1 \\ t & -1 & -t \end{pmatrix}.$$

Trouver la plus petite valeur de t telle que $A(t)$ ne soit pas diagonalisable puis trigonaliser la matrice correspondante.

Exercice 2.12 (☕)

Déterminer les éléments propres de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux dont l'un des indices appartient à $\{1, n\}$.

Exercice 2.13 (☕☕)

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{i,n+1-i}$.

Exercice 2.14 (☕☕)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \lambda$, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.*
2. *Montrer que si, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \lambda$, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.*

Exercice 2.15 (☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices A et A^2 soient semblables.

Diagonalisabilité de matrices par blocs

Exercice 2.16 (☕)

Déterminer les éléments propres des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Exercice 2.17 (☕☕)

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. *Diagonaliser J.*
2. *En déduire une diagonalisation de la matrice*

$$\begin{pmatrix} J & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Exercice 2.18 (☕☕)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

1. *Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.*
2. *Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et $B = 0_n$.*

Exercice 2.19 (☕)

Déterminer les réels a et b tels que la matrice

$$\begin{pmatrix} a\mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & b\mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

soit diagonalisable.

Exercice 2.20 (☕☕)

Soit $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{\mu\}$ et $\lambda \neq \mu$ puis

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 2.21 (☕☕)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 2.22 (☕☕)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & C^{\mathrm{T}} \\ C & 0_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

1. *Déterminer $\mathrm{rg}(A)$. En déduire que X^{n-1} divise le polynôme caractéristique χ_A.*
2. *Montrer que $\chi_A = X^{n-1}(X^2 - \alpha X - \beta)$ avec β une constante que l'on exprimera à partir de C.*
3. *Supposons $\beta = 0$. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.*
4. *Supposons $\beta \neq 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.*

Diagonalisabilité d'endomorphismes

Exercice 2.23 (☕)

Étudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme u de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $u : M \mapsto M^{\mathrm{T}}$.

Exercice 2.24 (☕)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Étudier la diagonalisabilité des endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définis par

1. *$u : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)\mathrm{I}_n$*
2. *$u : M \mapsto \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$*
3. *$u : M \mapsto M + \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n$*

Exercice 2.25 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et s une symétrie vectorielle. Considérons l'endomorphisme φ de $\mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi : u \mapsto \frac{1}{2}(s \circ u + u \circ s)$.

1. *Calculer φ^k pour $k \leq 3$ et en déduire un polynôme annulateur de φ.*

2. *L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?*

Exercice 2.26 (☕)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u : P \mapsto (X-a)P'$.

Exercice 2.27 (☕)

Soit u un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 2.28 (☕☕)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$.
Indication : on pourra établir que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\operatorname{Ker}(u^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u + \lambda \mathrm{Id})$.

Exercice 2.29 (☕☕)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 2.30 (☕☕)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite $(a_{i,j})_{i,j \leq n-1}$. Montrer que si A admet une valeur propre de multiplicité au moins 2, alors A et B admettent une valeur propre commune.

Exercice 2.31 (☕☕☕)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme tel que, pour tout $x \in E$, il existe λ_x, $\mu_x \in \mathbb{C}$ vérifiant $u^2(x) = \lambda_x u(x) + \mu_x x$. Montrer que u admet au plus deux valeurs propres.

Réduction simultanée

Exercice 2.32 (☕)

Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0_n$. Montrer que A et B admettent un vecteur propre commun.

Exercice 2.33 (☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u et v des endomorphismes de E diagonalisables qui commutent. Montrer qu'il existe une base de diagonalisation commune à u et v.

Exercice 2.34 (☕☕)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et u et v deux endomorphismes vérifiant $uv - vu = \alpha u$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Exercice 2.35 (☕☕)

Soit A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes*
   - **i.** *les matrices A et B admettent une valeur propre commune*
   - **ii.** *il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle vérifiant $AM = MB$*

iii. *la matrice* $\chi_A(B)$ *n'est pas inversible*

2. *Supposons* $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$. *Montrer que, pour toute matrice* $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *il existe une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $AM - MB = C$.

Exercice 2.36 (☕☕)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A, B \in E$ *et les endomorphismes de* E, $u : M \mapsto AM$ *et* $v : M \mapsto MB$.

1. *Montrer que* u *est un automorphisme si, et seulement si,* A *est inversible.*
2. *Montrer que* u *est diagonalisable si, et seulement si,* A *est diagonalisable.*
3. *Supposons* A, B *diagonalisables.*
   (a) *Montrer que l'application* $M \mapsto AMB$ *est diagonalisable. Que dire de la réciproque ?*
   (b) *Montrer que l'application* $M \mapsto AM - MB$ *est diagonalisable.*

Polynômes en une matrice/ un endomorphisme

Exercice 2.37 (☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Déterminer les polynômes* $P \in \mathbb{C}[X]$ *tels que* $P(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2.38 (☕☕)

Soit E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,* $p \in \mathbb{N}^*$ *puis* $u, v_1, \dots, v_p$ *des endomorphismes non nuls de* E, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}^*$ *deux à deux distincts tels que*

$$\forall n \in [\![1, p+1]\!], \qquad u^k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k v_i.$$

1. *Montrer que, pour tout polynôme* $P \in \mathbb{R}_{p+1}[X]$ *tel que* $P(0) = 0$,

$$P(u) = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) v_i.$$

2. *Montrer que* $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, \lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.
3. *Montrer que* $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \subset \mathrm{Sp}(u)$.

Exercice 2.39 (☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $\{-1, 1\} \subset \mathrm{Sp}(A)$ *et* $A^4 = A^2$. *Montrer que* A *est diagonalisable.*

Exercice 2.40 (☕)

Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telles que* $A^5 = A^2$ *et* $\mathrm{tr}\, A = n$.

Exercice 2.41 (☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Montrer que* 1 *est la seule valeur propre de* A *si, et seulement si, pour tout* $k > 0$, $\mathrm{tr}(A^k) = n$.

Exercice 2.42 (☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 = A + \mathrm{I}_n$. *Montrer que* $\det A > 0$.

Exercice 2.43 (☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + \mathrm{I}_n$. Montrer que A est un polynôme en B.
Indication : on pourra penser à l'interpolation de Lagrange.

Exercice 2.44 (☕☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que la matrice $P(A)$ est diagonalisable et la matrice $P'(A)$ est inversible. Montrer que A est diagonalisable.

Localisation de valeurs propres

Exercice 2.45 (☕☕)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

1. *Montrer que A est inversible.*
2. *Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de B. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|b_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |b_{i,j}|$.*

Exercice 2.46 (☕☕☕)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} > 0$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. *Montrer que $1 \in Sp(A)$ puis que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.*
2. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A distincte de 1. Montrer que $|\lambda| < 1$.*

3 – Révisions d'analyse

Convergence de suites

Exercice 3.1 (☕)

1. *Trouver une suite strictement positive de limite nulle qui n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.*
2. *Soit une suite strictement positive de limite nulle. Montrer qu'elle admet une sous-suite décroissante.*

Exercice 3.2 (☕☕)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n + v_n \to 0$ et $u_n^2 + v_n^2 \to 0$. Montrer que $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$.

Exercice 3.3 (☕☕)

Montrer qu'il n'existe pas de suite (u_n) strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}.$$

Indication : on pourra établir qu'une telle suite serait convergente de limite strictement positive.

Exercice 3.4 (☕☕)

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n^2 \to 1$ et $|u_{n+1} - u_n| < 1$ pour tout n. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3.5 (☕)

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Exercice 3.6 (☕)

Soit (u_n) une suite de limite $\ell \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k u_k$.

Exercice 3.7 (☕☕)

Soit (u_n) une suite complexe vérifiant $u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite en fonction de u_0.

Exercice 3.8 (☕)

Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Montrer que $u_n \to 0$, puis déterminer la limite de la suite $(n u_n)$.

Exercice 3.9 (☕☕)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [-1, 1]$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$.

1. *Justifier qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $u_0 = \cos(\alpha\pi)$.*
2. *Déterminer une expression de u_n en fonction de n et de α.*
3. *Déterminer les valeurs possibles pour la limite de (u_n).*
4. *Montrer que si la suite (u_n) converge, alors elle est stationnaire ; préciser les valeurs correspondantes pour u_0.*

Exercice 3.10 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de limite 1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \lambda_n f$.

1. *Montrer que f admet un unique point fixe ℓ, puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet un unique point fixe ℓ_n.*
2. *Étudier la convergence de la suite (ℓ_n).*

Exercice 3.11 (☕☕)

Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = n(u_n - n)$. Montrer que $u_n = O(n)$ si, et seulement si, $u_1 = 2e$.
Indication : on admet que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to e$.

Exercice 3.12 (☕☕☕)

Soit $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta < 1$ et (u_n) une suite positive vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} \leq \alpha u_{n+2} + \beta u_n$. Montrer que $u_n \to 0$.
Indication : on pourra poser $v_n = \max(u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$ puis montrer que la suite (v_n) est décroissante.

Fonctions réelles

Exercice 3.13 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et (u_n) une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Supposons la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k)$ bornée. Montrer que f admet un point fixe.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 3.14 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $f^* : x \mapsto e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Supposons que $f(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que $f^*(x) \to \ell$ en $+\infty$.*
2. *Supposons que $f(x) = ax + b + o(1)$ en $+\infty$. Déterminer un développement asymptotique de f^* en $+\infty$ à la même précision.*

Exercice 3.15 (☕)

Soit $f : I \to \mathbb{C}^*$ dérivable. Montrer que $t \mapsto |f(t)|$ est croissante si, et seulement si, $\mathfrak{Re}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) \geq 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 3.16 (☕☕☕)

Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $f \leq g$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = g(a)$. Montrer que les tangentes aux courbes représentatives de f et g au point d'abscisse a sont égales.

Exercice 3.17 (☕)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, nulle en a et b et $x \notin [a, b]$. Montrer qu'il passe par le point $(x, 0)$ au moins une tangente à la courbe représentative de f.

Exercice 3.18 (☕☕)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $a < b \in I$.

1. *Définissons l'application φ définie par $\varphi(x)$*

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$

où A est une constante choisie de sorte à ce que $\varphi(a)=0$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\varphi'(c)=0$.

2. En déduire qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Analyse asymptotique

Exercice 3.19 (☕☕)

Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : x\mapsto x^{3n}-3nx+1$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n admet une unique racine dans $]1,2[$. On note x_n cette racine.
2. Trouver a tel que $x_n=1+a\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.
3. Trouver b tel que $x_n=1+a\frac{\ln n}{n}+b\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3.20 (☕☕)

Définissons une suite (u_n) par $u_1>0$ et, pour tout $n\geq 1$, $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+nu_n^2}$.

1. Montrer que $nu_n\leq 1$ pour $n\geq 2$.
2. Montrer que la suite (nu_n) est croissante.
3. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 3.21 (☕☕)

1. Montrer que, pour n assez grand, l'équation $e^x=x^n$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}_+^*$, notées $u_n<v_n$.
2. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on précisera puis déterminer un équivalent de $u_n-\ell$.
3. Déterminer la limite de (v_n) puis donner un équivalent de v_n.
4. Donner un développement asymptotique de v_n.

Exercice 3.22 (☕)

Déterminer les $\alpha>0$ tels que $\exp((x+1)^\alpha)\underset{+\infty}{\sim}\exp(x^\alpha)$.

Exercice 3.23 (☕)

Montrer que $\arccos(x)\underset{1}{\sim}\sqrt{2(1-x)}$.

Exercice 3.24 (☕☕)

Montrer que $f : x\mapsto\frac{x}{\ln x}$ réalise une bijection de $[e,+\infty[$ dans $[e,+\infty[$ puis déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ en $+\infty$.

Exercice 3.25 (☕☕☕)

Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ continues telles que $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ et $\ln f(x)\sim\alpha x^2$ en $+\infty$ pour un $\alpha>0$.

4 – Séries numériques

Convergence de série

Exercice 4.1 (☕)

Déterminer la nature de la série de terme général

1. $n^{-1-\frac{1}{n}}$
2. $\ln \frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n)\ln(n+2)}$
3. $e^{-(\ln n)^\alpha}$ *pour* $\alpha > 0$
4. $\sqrt{\ln(2n+3)} - \sqrt{\ln(2n)}$
5. $\frac{1}{n\ln(n)\ldots\ln(\ln(\ldots(\ln(n))\ldots))}$

Exercice 4.2 (☕)

Déterminer, selon les valeurs de a, b, $c \in \mathbb{R}$, *la nature de la série de terme général* $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$.

Exercice 4.3 (☕)

Soit $\alpha > 0$. *Montrer que la série de terme général* α^{H_n} *converge si, et seulement si,* $\alpha < e^{-1}$.

Exercice 4.4 (☕☕)

Déterminer la nature des séries dont le terme général est

1. $(\cos\frac{1}{n})^{n^\alpha}$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $(n\sin\frac{1}{n})^{n^\alpha}$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $(n\sin\frac{1}{n})^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}}$

Exercice 4.5 (☕☕)

Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.
Indication : on pourra considérer le réel $2-\sqrt{3}$ *et étudier* $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.

Exercice 4.6 (☕)

Déterminer selon la valeur de la constante $a > 0$ *la nature de la série de terme général* $\frac{n^2}{a^n}$.

Exercice 4.7 (☕)

Soit (u_n) *une suite de réels positifs. Déterminer la nature de la série de terme général* $\frac{u_n e^{-u_n}}{n^2}$.

Exercice 4.8 (☕☕)

Soit (u_n) *la suite définie, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *par* $u_{3n+1} = \frac{2}{\ln(n+1)}$, $u_{3n+2} = u_{3n+3} = \frac{-1}{\ln(n+1)}$. *Montrer que la série de terme général* u_n *converge puis que pour tout entier* $k \geq 2$, *la série de terme général* u_n^k *diverge.*

Exercice 4.9 (☕☕)

Soit (u_n) *une suite décroissante positive. Montrer que les séries de terme général* u_n *et* $2^n u_{2^n}$ *sont de même nature.*

Exercice 4.10 (☕☕)

Soit (u_n) *une suite décroissante positive. Montrer que les séries de terme général* u_n *et* nu_{n^2} *sont de même nature.*

Exercice 4.11 (☕☕)

Établir la convergence d'une série de terme général u_n positif vérifiant

$$\forall n \geq 1, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Exercice 4.12 (☕☕☕)

Notons, pour tout $n \geq 1$, $u_n = (-1)^n \frac{\sin \ln n}{n}$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.
Indication : on pourra considérer $u_{n+1} + u_n$.

Exercice 4.13 (☕☕)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln(1 + x^k)$.

1. *Déterminer la nature de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.*
2. *Étudier la convergence de la suite (u_n).*

Exercice 4.14 (☕☕☕)

Considérons la suite (a_n) telle que a_n est le nombre de diviseurs positifs de n.

1. *Notons $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n. Calculer l'expression de a_n.*
   Fixons $\varepsilon \in]0, 1]$.
2. *Justifier que, pour tout k tel que $p_k \geq 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\frac{\alpha_k + 1}{p_k^{\varepsilon \alpha_k}} \leq 1$.*
3. *Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{2^{\varepsilon x}}$ sur $\mathbb{R}_+$.*
4. *En déduire qu'il existe C (qui dépend de ε) tel que, pour tout $n \geq 1$, $a_n \leq C n^{\varepsilon}$.*
5. *Conclure que la série de terme général $\frac{a_n}{n^s}$ converge pour tout $s > 1$.*

Calculs de sommes

Exercice 4.15 (☕)

Soit $p \geq 1$ un entier. Posons, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{1-p}{n}$ si p divise n, $\frac{1}{n}$ sinon. Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 4.16 (☕)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n la somme partielle de la série harmonique. Montrer que la série de terme général $\frac{H_n}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente ; calculer sa somme.

Exercice 4.17 (☕☕)

1. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) une suite de limite nulle. Posons, pour tout n, $v_n = \sum_{k=0}^{p-1} u_{np+k}$. Montrer que les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature et, dans le cas convergent, de même somme.*
2. *Montrer que la série de terme général $\frac{j^n}{n+1}$ est convergente et calculer sa somme.*

Comparaison série/intégrale

Exercice 4.18 (☕)

Déterminer la nature de la série de terme général

1. $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$
2. $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$
3. $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2}$

Exercice 4.19 (☕)

1. *Déterminer la nature de la série de terme général* $\frac{\ln n}{n}$.
   Notons S_n *sa* n*-ième somme partielle.*
2. *Montrer que* $S_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$.
3. *Montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $S_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + c + o(1)$.

Exercice 4.20 (☕☕)

Soit $\alpha > 1$. *Notons, pour tout* $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ *et* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

1. *Montrer que* $R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
2. *Étudier la convergence de la série de terme général* $\frac{R_n}{S_n}$.

Exercice 4.21 (☕☕)

Soit une série divergente de terme général u_n *positif; notons* S_n *la* n*-ième somme partielle de cette série.*

1. *Montrer que la série de terme général* $\frac{u_n}{S_n}$ *diverge.*
   Indication : on pourra commencer par étudier la série de terme général $\frac{u_n}{S_{n-1}}$.
2. *Montrer que, pour tout* $\alpha > 0$, *la série de terme général* $\frac{u_n}{S_n^{1+\alpha}}$ *converge.*

Exercice 4.22 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *telle que* $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

1. *Montrer que si* $\ell < 0$, *alors la série de terme général* $f(n)$ *converge.*
2. *Montrer que si* $\ell > 0$, *alors la série de terme général* $f(n)$ *diverge.*
3. *Exhiber des fonctions* f *vérifiant* $\ell = 0$ *et pour lesquelles la nature de la série de terme général* $f(n)$ *diffère.*

Calcul asymptotique

Exercice 4.23 (☕)

Soit (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 1$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n^2)$.

1. *Montrer que la suite* (u_n) *converge vers une valeur que l'on précisera.*
2. *Pour une valeur de* α *bien choisie, montrer que la suite* $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ *converge vers une limite non nulle.*
3. *Déterminer la nature de la série de terme général* u_n.

Exercice 4.24 (☕☕)

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.*
   Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(n^{b-a} u_n)$.
2. *Étudier la convergence de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$.*
3. *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général u_n converge.*

Exercice 4.25 (☕☕)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\alpha}{n \ln n} + O(\frac{1}{n^2})$.

1. *Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n(\ln n)^\alpha}$.*
2. *En déduire la nature de la série de terme général u_n.*

Exercice 4.26 (☕☕)

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_{n+1} = o(u_n)$.

1. *Justifier que la série de terme général u_n converge.*
2. *Montrer que $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim u_n$.*

Exercice 4.27 (☕☕)

Considérons une série convergente de terme général $u_n > 0$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k u_k = o(n)$.
Indication : on pourra introduire R_n, le reste partiel de la série de terme général u_n.

Séries alternées

Exercice 4.28 (☕)

Déterminer la nature de la série de terme général

1. $\frac{(-1)^n}{n - \ln n}$
2. $\frac{(-1)^n}{n + \frac{(-1)^n n}{\ln n}}$
3. $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln n}$
4. $\ln \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
5. $\frac{(-1)^n}{H_n + (-1)^n}$
6. $(-1)^n \sin \frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

Exercice 4.29 (☕)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \cos(u_n)$. Étudier la convergence des séries de terme général $(-1)^n u_n$, $\ln \cos(u_n)$ et u_n.

Produits infinis

Exercice 4.30 (☕)

Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la suite (x_n) définie, pour $n \geq 1$, par $x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^\alpha}\right)$ est convergente.

Exercice 4.31 (☕)

Montrer que la suite (x_n) définie, pour $n \geq 1$, par $x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ est convergente.

Exercice 4.32 (☕☕)

Considérons la suite (x_n) définie, pour $n \geq 1$, par $x_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k}}{\sqrt{k}}\right)$.

1. *Montrer que $x_n \to 0$.*
2. *Justifier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$.*
3. *En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $x_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$.*

Exercice 4.33 (☕☕)

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$. On dit que le produit (infini) de terme général a_n converge si la suite (p_n) converge dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. *Montrer que, si le produit converge, alors $a_n \to 1$.*
   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - 1$.
2. *Montrer que le produit de terme général a_n converge si, et seulement si, la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge.*
3. *Supposons dans cette question que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le produit de terme général a_n converge si, et seulement si, la série de terme général u_n converge.*
4. *Supposons dans cette question que la série de terme général u_n converge. Montrer que la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge si, et seulement si, la série de terme général u_n^2 converge.*

Exercice 4.34 (☕☕)

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. Posons $u_0 = 1$, $u_1 = a_1$ et pour tout $n \geq 2$, $u_n = a_n u_{n-1} + u_{n-2}$ puis, pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n-1}}$.

1. *Supposons que la série de terme général a_n converge.*
   (a) *Montrer que, pour tout n, $u_n \leq \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$.*
   (b) *En déduire la nature de la série de terme général v_n.*
2. *Supposons que la série de terme général a_n diverge. En étudiant la série de terme général $u_{n-1}(u_n - u_{n-2})$ déterminer la nature de la série de terme général v_n.*

5 – Intégration

Intégration sur un segment

Exercice 5.1 (☕)

Déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto x \arctan(x)^2$.

Exercice 5.2 (☕)

Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *continue. Montrer que*

$$\int_0^{\pi} t f(\sin t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(\sin t) \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 5.3 (☕)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *continue telle que* $\int_0^1 f(t+n) \, \mathrm{d}t \to \ell \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $\int_0^1 f(nt) \, \mathrm{d}t \to \ell$.

Exercice 5.4 (☕☕)

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

1. *Montrer que, pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ *et tout* n, $2D_n(x) \sin \frac{1}{2} x = \sin(n + \frac{1}{2})x$.
2. *Montrer que, pour tout* $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$, $\int_0^{\pi} \varphi(t) \sin \lambda t \, \mathrm{d}t \to 0$ *quand* $\lambda \to +\infty$.
3. *Exprimer* $\int_0^{\pi} t D_n(t) \, \mathrm{d}t$ *comme une somme puis retrouver la valeur* $\zeta(2)$.

Exercice 5.5 (☕)

Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite (I_n) *où* $I_n = \int_1^e (\ln t)^n \, \mathrm{d}t$.

Exercice 5.6 (☕☕)

1. *Déterminer l'unique solution* α *de l'équation* $\operatorname{sh} x = 1$. *Posons, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\alpha} (\operatorname{sh} t)^n \, \mathrm{d}t$.
2. *Montrer que, pour tout* $n \geq 2$, $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
3. *En déduire un équivalent de* I_n.
   Indication : on pourra passer par un encadrement judicieux de I_n.

Exercice 5.7 (☕☕☕)

Notons, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ *non constant et qui n'admet pas de racine de module* 1,

$$M(P) = \int_0^{2\pi} \ln|P(e^{it})| \, \mathrm{d}t.$$

1. *Justifier la définition de* $M(P)$ *pour un polynôme* $P \in \mathbb{C}[X]$ *non constant et qui n'admet pas de racine de module* 1.
2. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *non constant et qui n'admet pas de racine de module* 1. *Montrer qu'il existe un réel* A, *des complexes* $z_1, \ldots, z_n \notin \mathbb{U}$ *tels que*

$$M(P) = A + \sum_{k=1}^{n} M(X - z_k).$$

3. *Soit $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Montrer que l'application $\theta \mapsto M(X - re^{i\theta})$ est constante.*
4. *Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $M(X - r) = \max(0, \ln r)$.*
   Indication : on pourra utiliser les sommes de Riemann et la décomposition $X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2\cos\frac{k\pi}{n} X + 1)$.

Exercice 5.8 (☕☕☕)

Soit F l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. *Montrer que, pour tout $n > 0$, il existe un unique polynôme P_n de degré 2 vérifiant $P_n(0) = 0$, $P_n(\frac{1}{n}) = 1$ et $P_n'(\frac{1}{n}) = 0$.*
   Définissons, pour tout $n > 0$, une fonction f_n sur $[0,1]$ par

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x > \frac{1}{n}, \\ P_n(x)e^{x-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. *Montrer que, pour tout $n > 0$, $f_n \in F$.*
3. *Montrer que $\int_0^1 |f_n'(t) - f_n(t)|\,\mathrm{d}t \to e^{-1}$.*
4. *Montrer que, pour tout $f \in F$, $\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \geq e^{-1}$.*

Intégrales fonction des bornes

Exercice 5.9 (☕☕)

Définissons une fonction sur $\mathscr{D} =]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.

Exercice 5.10 (☕)

Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5.11 (☕)

Montrer que $\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Exercice 5.12 (☕☕☕)

Soit $f : [0,a] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ nulle en 0. Montrer que $\int_0^a |f'(t)f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$.
Indication : on pourra introduire la fonction $F : x \mapsto \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Intégrabilité

Exercice 5.13 (☕)

Déterminer parmi les fonctions suivantes celles qui sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$:

1. $x \mapsto \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$
2. $x \mapsto \frac{1}{(e^x-1)(e^{-x}+1)}$
3. $x \mapsto \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

Exercice 5.14 (☕)

Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5.15 (☕)

Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \frac{1+x^2}{x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer son intégrale.

Exercice 5.16 (☕)

Étudier l'intégrabilité sur $]-1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$.

Exercice 5.17 (☕)

Déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Exercice 5.18 (☕☕)

Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 5.19 (☕☕)

Étudier l'intégrabilité sur $]\frac{2}{\pi}, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln\cos\frac{1}{x}$.

Exercice 5.20 (☕☕)

Soit $\alpha \in [0,1[$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \to \alpha$ lorsque $x \to +\infty$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5.21 (☕☕)

1. *Justifier l'existence des intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$, et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.*
2. *Montrer que $I = J$.*
3. *Calculer la valeur de $I + J$ à l'aide du changement de variables $u = t - \frac{1}{t}$. En déduire la valeur de I.*

Exercice 5.22 (☕☕)

1. *Justifier, pour tout $n > 0$, l'existence des intégrales $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^n)}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}\,\mathrm{d}t$.*
2. *Montrer que, pour tout $n > 0$, $I_n = J_n$ puis calculer cette valeur commune.*

Exercice 5.23 (☕)

1. *Montrer l'existence des intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et la fonction $J : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\alpha^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *Montrer que $I = 0$, puis déterminer J.*

Exercice 5.24 (☕☕)

1. *Soit $a > -1$. Montrer, en posant $x = \tan t$, que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.*
2. *Étudier en fonction de $\alpha > 0$ la convergence de la série de terme général $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$.*
3. *En déduire en fonction de $\alpha > 0$ l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^\alpha \sin^2(x)}$.*

Exercice 5.25 (☕☕)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = (1 - \frac{1}{3n}) I_n$.*
2. *Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\ln I_n = \alpha \ln n + \beta + o(1)$.*
3. *En déduire que la série de terme général I_n converge.*

Exercice 5.26 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t$.*
2. *Supposons dorénavant f' intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ sont de même nature.*
3. *Soit $\alpha > \frac{1}{2}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha} \cos \sqrt{n}$.*

Intégrales convergentes

Exercice 5.27 (☕☕)

Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(t \ln t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 5.28 (☕☕)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. *Préciser le signe de u_n en fonction de n.*
2. *Montrer que la série de terme général u_n converge mais ne converge pas absolument.*

Exercice 5.29 (☕☕)

Discuter selon les valeurs réelles de α la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{i t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5.30 (☕☕)

Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existent et sont égales.

Exercice 5.31 (☕☕)

1. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Exercice 5.32 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue de limite ℓ en 0 et de limite ℓ' en $+\infty$, $a, b > 0$.

1. *Montrer que $\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \to \ell' \ln \frac{b}{a}$ lorsque $x \to +\infty$. Énoncer un résultat analogue concernant la limite en 0.*
2. *Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente puis déterminer sa valeur.*
3. *Calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$, et $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.*

6 – Suites et séries de fonctions

Convergence de suites de fonctions

Exercice 6.1 (☕)

Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) *définie*

1. *sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$
2. *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $f_n : x \mapsto \frac{4-(\ln x)^{2n}}{1+(\ln x)^{2n}}$
3. *sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n : x \mapsto \frac{x}{|x|+\frac{1}{n}}$.
4. *sur* $[0,1]$ *par* $f_n : x \mapsto \frac{x^n-1}{x^n+1}$
5. *sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n : x \mapsto nxe^{-x^2\ln n}$
6. *sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n : x \mapsto \sin\frac{(n+1)x}{n}$
7. *sur* $[-1,1]$ *par* $f_n : x \mapsto \sin(nxe^{-nx^2})$
8. *sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+x+\ldots+x^n}$
9. *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $f_n : x \mapsto (\frac{x}{n})^{nx}$
10. *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $f_n : x \mapsto n(\sqrt[n]{x}-1)$
11. *sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n : x \mapsto \cos^n x \sin^{2n} x$
12. *sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *par* $f_n : x \mapsto n\cos x\sin^n x$
13. *sur* $]0,\pi[$ *par* $f_n : x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{n\sin^2(x)}$

Exercice 6.2 (☕)

Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n : x \mapsto \min(n, \frac{x^2}{n})$.

Exercice 6.3 (☕☕)

Considérons la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. *Étudier la convergence de la suite de fonctions* (f_n) *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Justifier que chaque fonction* f_n *est dérivable.*
3. *Étudier la convergence de la suite de fonctions* (f_n') *sur le segment* $[-1,1]$.

Exercice 6.4 (☕☕)

Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par*

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi\sqrt{n}}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6.5 (☕☕)

Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n : x \mapsto \prod_{k=1}^{n} \sin(2^k x)$.

Indication : pour la convergence uniforme, on pourra établir qu'il existe $C \in [0,1[$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x \sin 2x| \leq C$.

Exercice 6.6 (☕☕☕)

Considérons la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ *par* $f_n : x \mapsto 3^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$.

1. *Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n).*
2. *Comparer la limite de la suite des intégrales de f_n et l'intégrale de la limite de cette suite.*

Exercice 6.7 (☕☕)

Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un intervalle I et convergeant uniformément vers des fonctions f et g. Est-ce que la suite $(\max(f_n, g_n))$ converge uniformément vers $\max(f, g)$?

Exercice 6.8 (☕☕)

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles qui convergent uniformément sur un intervalle I. Considérons la suite de fonctions (g_n) définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$. Montrer que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur I.

Exercice 6.9 (☕☕☕)

Étudier la convergence de la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0 : x \mapsto \sin x$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \mapsto \sin f_n(x)$.

Exercice 6.10 (☕☕☕)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n}\int_0^n f(x+t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.11 (☕☕☕)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, majorée. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sup\{f(t) - n|x-t|,\ t \in \mathbb{R}\}$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n).

Autour du théorème de Weierstrass

Exercice 6.12 (☕☕)

Soit $d \in \mathbb{N}$ et (P_n) une suite de fonctions polynomiales de degré au plus d qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction polynomiale P.

1. *Montrer que P est de degré au plus d.*
2. *Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment.*
   Indication : on pourra utiliser l'interpolation de Lagrange.

Exercice 6.13 (☕☕☕)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$,

$$P_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t}.$$

1. *Justifier que, pour tout n, P_n est une fonction polynomiale ; préciser son degré.*
2. *Montrer que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur $[-1,1]\setminus]-a,a[$ pour tout $a \in]0,1[$.*
   Notons, pour tout n, Q_n la primitive de P_n nulle en 0.
3. *Montrer que la suite de fonctions (Q_n) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction que l'on précisera.*

Exercice 6.14 (☕☕☕)

Définissons une suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_0 : x \mapsto 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \mapsto f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$. Étudier la convergence de la suite de fonctions (f_n).

Exercice 6.15 (☕☕)

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\varphi_n : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n}(1-x^2)^n & \text{si } x \in [-1,1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où α_n est un réel choisi de sorte à ce que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

1. *Calculer α_n.*
2. *Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\mathbb{1}_{|t|>\varepsilon}\,\mathrm{d}t \to 0$.*
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
3. *Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment.*
4. *Conclure.*

Séries de fonctions

Exercice 6.16 (☕)

Étudier la convergence normale (selon l'intervalle considéré) de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto \frac{\ln(n+x)}{n^2+x^2}$.

Exercice 6.17 (☕)

Montrer que les séries de fonctions de terme général

1. $f_n : x \mapsto (-1)^n \ln(1 + \frac{x}{n(1+x)})$
2. $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{\sqrt{n}}$

convergent uniformément sur $\mathbb{R}_+$ mais pas normalement.

Exercice 6.18 (☕)

Soit f la somme de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto 3^{-n}\sin(3^n x)$.

1. *Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Relier $f(3x)$ et $f(x)$. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.*

Exercice 6.19 (☕)

1. *Déterminer le domaine de convergence de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-\sqrt{n}x}}{n}$.*
   Notons f la somme de cette série.
2. *Montrer que f est dérivable.*
3. *Montrer que f est monotone.*
4. *Étudier f en $+\infty$.*

Exercice 6.20 (☕)

Soit f la somme de la série de fonctions de terme général, pour $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto \frac{x}{x^2+n^2}$.

1. *Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer un équivalent en 0 de f.*

Exercice 6.21 (☕☕)

Considérons la somme f de la série de fonctions de terme général, pour $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. *Préciser le domaine de définition de f puis montrer que f y est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$.*
2. *Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $xf(x) - f(x+1) = C$ pour tout x dans le domaine de définition.*
3. *Donner des équivalents de f en $+\infty$ et en 0.*

Exercice 6.22 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ et, pour tout $n > 0$, $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *Montrer, pour $x > 0$ et $n > 0$, que $0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$.*
3. *Étudier la continuité de f.*
4. *La série de fonctions définissant f converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+^*$? sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$?*

Exercice 6.23 (☕☕)

Soit f la somme de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto \ln(1 + e^{-nx})$.

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *Montrer que f est continue, strictement décroissante sur son domaine de définition.*
3. *Montrer que f admet une limite en $+\infty$.*
4. *Donner un équivalent de f en 0.*
5. *La fonction f est-elle intégrable sur $]0,1]$? sur $[1,+\infty[$?*

Exercice 6.24 (☕☕)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto n^\alpha xe^{-nx}$. Notons S_α la somme de la série associée.

1. *Déterminer les α tels que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que S_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout α.*
3. *Montrer que S_1 n'est pas continue en 0.*
4. *Montrer que, pour $\alpha < 1$, S_α est continue en 0.*

Exercice 6.25 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et (f_n) la suite de fonctions définie par $f_0 = f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier que la série de fonctions de terme général f_n converge et calculer sa somme.

Exercice 6.26 (☕☕)

Soit f la somme de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto e^{-\sqrt{n}x}$.

1. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.*
2. *Déterminer un équivalent en 0 de f.*

7 – Intégrales à paramètre

Suites d'intégrales

Exercice 7.1 (☕)

Posons, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t+t^{2n}}} \,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, qu'elle converge et calculer sa limite.

Exercice 7.2 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue telle que la fonction $x \mapsto f(x)e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \int_0^n f(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

Exercice 7.3 (☕☕)

Déterminer la limite de (u_n) définie par $u_n = \int_0^n \cos^{n^2}\left(\frac{t}{n}\right) \mathrm{d}t$.

Exercice 7.4 (☕)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite de (u_n) définie, pour tout $n \geq 1$, par $u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7.5 (☕)

Posons, pour tout $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto \frac{n}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$.

1. *Justifier que, pour tout $n \geq 1$, f_n est intégrable sur $]1, +\infty[$.*
2. *Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.*

Exercice 7.6 (☕☕)

1. *Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$.*

   Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \,\mathrm{d}t$.
2. *Montrer que la suite (I_n) est constante.*
3. *En déduire la valeur de I.*
   Indication : on pourra introduire la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$.

Exercice 7.7 (☕☕)

Montrer que la suite $\left(n \int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t\right)$ converge vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t$.

Séries d'intégrales

Exercice 7.8 (☕)

1. *Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{2n}(1-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t$.*
2. *En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.*

Exercice 7.9 (☕☕)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 7.10 (☕☕)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+\cdots+t^n}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que $u_n \to 0$.*
2. *Déterminer la nature de la série de terme général u_n.*

Exercice 7.11 (☕☕)

On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \to \gamma$.

1. *Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right)\mathrm{d}t$.*
2. *Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u}\right)e^{-u}\,\mathrm{d}u$.*
3. *Étudier la série de fonctions de terme général $u_n : x \mapsto e^{-nx}\left(1 - \frac{1}{x}(1-e^{-x})\right)$.*
4. *En déduire la valeur de I.*

Intégrales fonction d'un paramètre

Exercice 7.12 (☕)

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \arctan x$.

Exercice 7.13 (☕)

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \arctan \frac{x}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{t^2-1} \ln t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7.14 (☕)

Définissons deux fonctions par $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$.

1. *Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que $g = \frac{\pi}{4} - f$.*
3. *En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.*

Exercice 7.15 (☕)

Définissons une fonction par $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Préciser le domaine de définition de f.*
2. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.*
3. *Calculer f.*
4. *En déduire, pour $a, b > 0$ l'expression de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.*

Exercice 7.16 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*

2. *Étudier la continuité et la dérivabilité de f.*

Exercice 7.17 (☕☕)

Définissons une fonction par $f : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *Déterminer des équivalents de f en $+\infty$ et en 0.*

Exercice 7.18 (☕)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3+x^3}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Calculer la valeur $f(0)$.*
3. *Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la calculer.*

Exercice 7.19 (☕)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *et* $g : x \mapsto \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.*
2. *Montrer que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.*
3. *En déduire que $f = g$ puis la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.*

Exercice 7.20 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln t\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$.*
3. *Exprimer f à partir de la constante $C = f(1)$.*

Exercice 7.21 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{2\pi} e^{2x\cos t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que f est solution d'une équation différentielle*
2. *En déduire une expression de f.*

Exercice 7.22 (☕)

1. *Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.*
2. *Montrer que l'application $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un domaine que l'on précisera.*
3. *En déduire l'expression de f.*
4. *Montrer que f est continue en 0.*
5. *Obtenir la valeur de I.*

Exercice 7.23 (☕)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle.
3. En déduire f.

Exercice 7.24 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de f.
2. En utilisant la décomposition $\frac{t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{t+1}{t^2-t+1} - \frac{1}{t+1}\right)$, calculer $f'(0)$.
3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 7.25 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine $\mathscr{D}$ de définition de f puis montrer que f est continue sur $\mathscr{D}$.
2. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(1-x)$ pour $x \in \mathscr{D}$.
3. Déterminer limites et équivalents de $f(x)$ aux bornes de $\mathscr{D}$.

Exercice 7.26 (☕☕)

Définissons une fonction par $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de f' en $+\infty$.
4. Calculer $f - f'$.
5. En déduire un développement asymptotique de f à deux termes en $+\infty$.

Exercice 7.27 (☕☕)

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \int_0^1 e^{-\frac{x}{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7.28 (☕☕)

1. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f : x \mapsto \int_x^{x+1} \ln(\Gamma(t))\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.

Exercice 7.29 (☕☕☕)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors d'un segment de la forme $[-A, A]$. Posons $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}\,\mathrm{d}t$.

1. Préciser le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_n telle que $|F(x)| \leq C_n x^{-n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

8 – Séries entières

Calculs de rayon de convergence

Exercice 8.1 (☕)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient

1. n^2
2. le n-ième terme de la suite de Fibonacci
3. $\frac{n^n}{n!}$
4. $(37+(-1)^n)^n$
5. $\frac{1}{\sin(\sqrt{3}\pi n)}$
6. $e^{\alpha\sqrt{n}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
7. $(\ln n)^{-\ln n}$
8. $\frac{2^{(-1)^n}}{n}$

Exercice 8.2 (☕)

Notons, pour tout n, a_n la somme des puissances 37-ièmes des diviseurs positifs de n. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.

Exercice 8.3 (☕)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient $\operatorname{tr}(A^n)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.4 (☕☕)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient la n-ième décimale de α.

Exercice 8.5 (☕)

Soit (a_n) et (b_n) des suites complexes telles que $|a_n| \sim |b_n|$. Montrer que les séries entières de coefficients a_n et b_n ont même rayon de convergence.

Exercice 8.6 (☕☕)

Montrer que le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n est la borne supérieure de l'ensemble des $r \geq 0$ tel que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k r^k\right)$ est bornée.

Exercice 8.7 (☕☕)

Soit (a_n) une suite de complexes non nuls. Notons R et R' les rayons de convergence des séries entières de coefficients a_n et $\frac{1}{a_n}$. Montrer que si R et R' sont finis, alors $RR' \leq 1$.

Exercice 8.8 (☕☕)

Soit (a_n) une suite telle que la série entière de coefficient a_{2n} est de rayon $R > 0$, et la série entière de coefficient a_{2n+1} est de rayon $R' > 0$. Déterminer le rayon de la série entière de coefficient a_n.

Exercice 8.9 (☕☕)

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ et (a_n) une suite ne s'annulant pas telle que $\frac{a_{n+3}}{a_n} \to \ell$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.

Exercice 8.10 (☕☕☕)

Soit (a_n) une suite. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n la n-ième somme partielle de la série de terme général a_n. Montrer que les séries entières $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{A_n}{n!} x^n$ ont même rayon de convergence.

Calculs de sommes

Exercice 8.11 (☕)

Déterminer la somme des séries entières

1. $\sum \frac{1}{2n+1} x^n$
2. $\sum \frac{4n+1}{(2n-1)(n+1)} x^n$
3. $\sum \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$
4. $\sum \frac{n}{(2n+1)!} x^n$
5. $\sum \cos(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}) \frac{1}{n} x^n$

Exercice 8.12 (☕☕)

Déterminer la somme de la série entière $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

Exercice 8.13 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ et $g : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} \,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *Montrer que g est définie sur $[-1,1]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.*
3. *Calculer f' sur $]-1,1[$. En déduire que $f + g = 0$ sur $[-1,1]$.*
4. *À l'aide d'une intégration par parties et d'un changement de variable, relier $g(x)$, $g(1-x)$ et $g(1)$.*
5. *En déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n n^2}$.*

Exercice 8.14 (☕☕)

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.*
2. *Trouver une relation de récurrence liant a_n et a_{n+2}.*
3. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n.*
4. *Préciser la nature de la série de terme général $a_n \alpha^{\sqrt{n}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.*

Exercice 8.15 (☕)

Soit (u_n) une suite bornée, (S_n) la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général u_n.

1. *Déterminer les rayons de convergence de $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n$.*
2. *Trouver une relation entre u', S' et S.*
3. *Déterminer la limite de $S(x)e^{-x}$ en $+\infty$ dans le cas où $u_n = (-1)^n$.*

Exercice 8.16 (☕☕)

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$.

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 2^{n+1} - 1$.*
   Qu'en déduire sur le rayon de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?
2. *Calculer $S(x)$ puis en déduire la valeur de a_n.*

Étude au bord de l'intervalle de convergence

Exercice 8.17 (☕)

Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que la série de terme général a_n est divergente. Supposons que le rayon de convergence de la série entière de coefficient a_n vaut 1 et notons f sa somme. Montrer que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.

Exercice 8.18 (☕☕)

Considérons la série entière de coefficient $\tan \frac{1}{\sqrt{n}}$ et notons f sa somme.

1. *Calculer le rayon de convergence R de la série entière définissant f puis étudier la convergence en $\pm R$.*
2. *Déterminer la limite en 1 de $x \mapsto (1-x)f(x)$.*

Exercice 8.19 (☕☕)

Considérons la série entière de coefficient $(-1)^n \ln n$ et notons f sa somme.

1. *Calculer le rayon de convergence R de la série entière définissant f puis étudier la convergence en $\pm R$.*
2. *Montrer que f admet une limite finie en R.*
   Indication : on pourra introduire $(1+x)f(x)$.

Exercice 8.20 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2^n}$.

1. *Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.*
2. *Exprimer, pour $x \in]-R, R[$, $f(x^2)$ en fonction de $f(x)$ et x.*
3. *En déduire la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque $x \to R$.*

Exercice 8.21 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

1. *Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.*
2. *Montrer que $f(x) = o(e^x)$ quand $x \to +\infty$.*

Exercice 8.22 (☕☕)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n la somme partielle de la série harmonique, puis considérons les fonctions f et g sommes des séries entières de coefficients H_n et $\ln n$.

1. *Déterminer les rayons de convergence de ces séries entières.*
2. *Calculer f.*
3. *Montrer que $f(x) \underset{1}{\sim} g(x)$.*
4. *En considérant $(1-x)g(x)$, montrer que g admet une limite finie en -1.*

Développement en série entière

Exercice 8.23 (☕)

Développer en série entière les fonctions suivantes

1. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$
2. $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $x \mapsto e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 8.24 (☕☕)

1. *Préciser la suite (a_n) des coefficients du développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.*
2. *Déterminer un équivalent simple de a_n.*
3. *En déduite un équivalent en 1 de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$.*

Exercice 8.25 (☕☕)

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 x e^{-xt\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Étudier la régularité de f sur $\mathbb{R}$.*
2. *Calculer le développement en série entière de f.*

Exercice 8.26 (☕☕☕)

Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(ax)$.

1. *Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.*
2. *Montrer que f n'est pas développable en série entière si $|a| > 1$ et $f(0) \neq 0$.*
3. *Montrer que f est développable en série entière si $|a| \leq 1$.*

Exercice 8.27 (☕☕☕)

Soit $a > 0$ et $f : [0, a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

1. *Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x)$ le reste intégral de Taylor d'ordre n de f en 0. Montrer que $x \mapsto x^{-n-1}R_n(x)$ est croissante sur $[0, a[$.*
2. *En déduire que f est développable en série entière sur $[0, a[$.*

Exercice 8.28 (☕☕☕)

1. *Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence R strictement positif telle qu'il existe une suite (x_k) de limite nulle avec, pour tout k, $0 < |x_k| < R$, et $f(x_k) = 0$. Montrer que tous les coefficients de f sont nuls.*
2. *Déterminer toutes les fonctions f développables en séries entières avec un rayon supérieur ou égal à 1 telles que $f(\frac{1}{2k}) = \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

Équations différentielles

Exercice 8.29 (☕☕)

Considérons la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* f *est solution de l'équation différentielle* (E) $xy'' + y' - xy = -1$.
2. *Déterminer les solutions de* (E) *développables en série entière.*
3. *En déduire la valeur des intégrales* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8.30 (☕☕)

Considérons la suite (a_n) *définie par* $a_0 = 1$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$.*Notons* f *la somme de la série entière de coefficient* a_n *et* R *son rayon.*

1. *Montrer que* $R \geq 1$.
2. *Montrer que, pour* $x \in]-R, R[$, $f(x) = \frac{2}{e^x+1}$.

Applications au dénombrement

Exercice 8.31 (☕☕)

Notons $D_0 = 1$ *puis, pour tout* $n \geq 1$, D_n *le nombre de permutations de* $[\![1, n]\!]$ *(ou plus généralement d'un ensemble de cardinal* n*) sans point fixe. Soit* R *le rayon de la série entière de coefficient* $\frac{D_n}{n!}$ *et* f *sa somme.*

1. *Justifier que* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$.
2. *Montrer que* $R \geq 1$ *puis calculer* f.
3. *Expliciter* $e^x f(x)$. *En déduire une expression de* D_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.32 (☕☕☕)

Une application $u : X \to X$ *est une involution de l'ensemble* X *si* $u \circ u = \mathrm{Id}$. *Notons* $I_0 = 0$ *et, pour tout* $n \geq 1$, I_n *le nombre d'involutions d'un ensemble à* n *éléments.*

1. *Calculer* I_1, I_2 *et* I_3.
2. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
   Indication : on pourra partitionner les involutions de $[\![1, n+1]\!]$ *selon l'image de* $n+2$.
   Soit R *le rayon de la série entière de coefficient* $\frac{I_n}{n!}$ *et* f *sa somme.*
3. *Montrer que* $R > 0$.
4. *Montrer que, pour tout* $x \in]-R, R[$, $f'(x) = (1+x)f(x) + 1 + x$. *En déduire* f.

Exercice 8.33 (☕☕☕)

Pour tout $n \geq 1$, *notons* B_n *le nombre de partitions d'un ensemble à* n *éléments. Posons* $B_0 = 1$.

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.
   Indication : on pourra partitionner les partitions de $[\![1, n+1]\!]$ *selon le cardinal de la partie contenant* $n+1$.
   Soit R *le rayon de la série entière de coefficient* $\frac{B_n}{n!}$ *et* f *sa somme.*
2. *Montrer que* $R > 0$ *puis déterminer une équation différentielle dont* f *est solution.*
3. *Exprimer* f *puis, en déduire une expression de* B_n.

9 – Espaces probabilisés

Manipulation d'événements

Exercice 9.1 (☕)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

1. *Montrer que $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \leq \min\{\mathbf{P}(A_i),\ i \in [\![1, n]\!]\}$.*
2. *Montrer que $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - (n-1)$.*

Exercice 9.2 (☕)

Soit A, B et C des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ tels que $\mathbf{P}(A|C) > P(B|C)$ et $\mathbf{P}(A|\overline{C}) > P(B|\overline{C})$. Montrer que $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(B)$.

Exercice 9.3 (☕)

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Montrer qu'il n'existe pas des événements $A_1, \ldots, A_n$, indépendants, de réunion Ω et de même probabilité.

Exercice 9.4 (☕)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Montrer que

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k\Big) \leq \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)\Big) \leq \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)}.$$

Exercice 9.5 (☕☕)

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. Posons $\limsup A_n = \bigcap_{p\geq 1}\big(\bigcup_{n\geq p} A_n\big)$.

1. *Montrer que $\limsup A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe une infinité d'indices k vérifiant $\omega \in A_k$.*
2. *Interpréter de même l'événement $\liminf A_n = \bigcup_{p\geq 1}\big(\bigcap_{n\geq p} A_n\big)$.*

Exercice 9.6 (☕☕☕)

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé.

1. *Supposons que la série de terme général $\mathbf{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbf{P}\Big(\bigcap_{p\geq 1}\Big(\bigcup_{n\geq p} A_n\Big)\Big) = 0$.*
2. *Supposons que la série de terme général $\mathbf{P}(A_n)$ diverge et que les événements sont mutuellement indépendants. Montrer que $\mathbf{P}\Big(\bigcap_{p\geq 1}\Big(\bigcup_{n\geq p} A_n\Big)\Big) = 1$.*

Exercice 9.7 (☕☕)

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Définissons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, B_k l'événement « au moins k événements parmi $A_1, \ldots, A_n$ sont réalisés ». Montrer, en calculant l'espérance d'une somme d'indicatrices judicieusement choisies, que $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(B_k)$.

Exercice 9.8 (☕☕)

Soit (A_n) une suite d'événements telle que la série de terme général $\mathbf{P}(A_n)$ converge et S sa somme. Notons, pour tout k, B_k l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à exactement k événements de la suite (A_n). Montrer que, pour tout $k \geq 1$, $\mathbf{P}(B_k) \leq \frac{1}{k} S$.

Modélisation

Exercice 9.9 (☕)

On considère des dés équilibrés et des lancers indépendants.

1. *Comparer la probabilité d'obtenir un 6 en lançant un dé et la probabilité d'obtenir un double 6 en lançant deux dés.*
2. *Comparer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en lançant un dé quatre fois et la probabilité d'obtenir au moins un double 6 en lançant deux dés vingt-quatre fois.*

Exercice 9.10 (☕)

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire les boules deux par deux sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir à chaque tirage une boule blanche et une boule rouge ?

Exercice 9.11 (☕)

Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On tire toutes les boules successivement et sans remise.

1. *Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant, non nécessairement consécutivement.*
2. *Déterminer la probabilité que l'on tire les boules de numéros impairs dans l'ordre croissant et consécutivement.*

Exercice 9.12 (☕)

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges ; tirons les boules avec les règles suivantes

- *si la boule est blanche, on la retire définitivement ;*
- *si la boule est rouge, on la replace dans l'urne.*

Déterminer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages.

Exercice 9.13 (☕)

Considérons n pièces numérotées de 1 à n telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la pièce numéro k donne Pile avec probabilité $\frac{1}{2k+1}$. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair de Piles en lançant toutes ces pièces.

Exercice 9.14 (☕☕)

Considérons n pièces équilibrées numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons A_k l'événement « la pièce numéro k donne Pile » et A_0 l'événement « le nombre de Piles obtenus est pair ».

1. *Montrer que les événements $A_0, \ldots, A_n$ ne sont pas indépendants.*
2. *Soit I une partie de $[\![0, n]\!]$ de cardinal n. Montrer que les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants.*

Exercice 9.15 (☕☕)

Considérons une pièce équilibrée et une pièce avec deux côtés Pile. On lance l'une de ces pièces à n reprises et on obtient n Piles. Quelle est la probabilité que la pièce lancée soit équilibrée ?

Exercice 9.16 (☕)

Soit $n \geq 2$. Considérons un jeu de cartes numérotées initialement de 1 à n. Après avoir mélangé les cartes, quelle est la probabilité que

1. *la carte 1 soit plus loin dans le paquet que la carte 2 ?*
2. *les cartes 1 et 2 soient voisines ?*

Exercice 9.17 (☕☕)

Soit $n \geq 2$. Une permutation $\sigma \in S_n$ bat un record en $j \in [\![1, n]\!]$ si $\sigma(j) > \sigma(i)$ pour tout $i < j$. Déterminer la probabilité qu'une permutation choisie uniformément dans S_n batte un record en j.

Exercice 9.18 (☕☕)

Soit $\Omega = [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur Ω. Notons P_n l'ensemble des diviseurs premiers de n et définissons, pour tout $p \in \mathrm{P}_n$, $A_p = \left\{a \in \Omega,\ p | a\right\}$.

1. *Calculer $\mathbf{P}(A_p)$ pour tout $p \in \mathrm{P}_n$.*
2. *Montrer que les événements A_p pour $p \in \mathrm{P}_n$ sont indépendants.*
   Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction d'Euler ($\varphi(n)$ est donc le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $k \wedge n = 1$).
3. *Montrer que*
$$\varphi(n) = n \prod_{p \in \mathrm{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Exercice 9.19 (☕☕☕)

Un message binaire est successivement transmis par des relais. Le k-ième relais transmet l'opposé de l'information reçue avec probabilité $p_k \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et la transmet à l'identique sinon. Notons, pour tout $n \geq 1$, α_n la probabilité que le message n'ait jamais été altéré après n relais et β_n la probabilité que le message après n relais soit identique au message initial. Montrer que $\lim \alpha_n = 0$ si, et seulement si, $\lim \beta_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 9.20 (☕☕☕)

Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers, $n \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq p_1 < p_2 \leq n$. Considérons l'ensemble $\Omega = [\![1, n]\!]$ muni de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$ et définissons les événements $E_1 = \left\{k \in \Omega,\ p_1 | k\right\}$ et $E_2 = \left\{k \in \Omega,\ p_2 | k\right\}$.
Montrer que E_1 et E_2 sont indépendants si, et seulement si, n s'écrit sous la forme $n = k p_1 p_2 + \ell p_1$ avec $k, \ell \in \mathbb{N}$ vérifiant $\ell p_1 < p_2$.

10 – Variables aléatoires

Calculs de lois

Exercice 10.1 (☕)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k.$$

Déterminer a puis calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 10.2 (☕)

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et Y la variable telle que la loi de Y sachant $X = k$ est uniforme sur $[\![1,k]\!]$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 10.3 (☕)

Soit $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ des événements tels que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(A_k) = \frac{k}{n}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire de comptage du nombre d'événements réalisés $N = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$.

Exercice 10.4 (☕)

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$. Considérons N la variable aléatoire égale à 0 si $X_1 = \cdots = X_n = 1$ et à $\min\{k \leq n,\ X_k = 0\}$ sinon. Déterminer la loi de N.

Exercice 10.5 (☕)

Soit $p \in]0,1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $\frac{X}{Y}$.

Exercice 10.6 (☕)

Soit $\lambda > 0$ et $p \in]0,1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p et de loi de Poisson de paramètre λ. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X = Y)$.

Exercice 10.7 (☕☕☕)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$, X une variable suivant une loi binomiale de paramètres n et p, Y une variable suivant une loi binomiale de paramètres $n+1$ et p. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X \geq k) \leq \mathbf{P}(Y \geq k)$.

Espérance, variance

Exercice 10.8 (☕)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. *Reconnaître la loi de la variable $\min(X_1, \ldots, X_n)$.*
2. *Est-ce que la variable $\max(X_1, \ldots, X_n)$ admet une espérance finie ?*

Exercice 10.9 (☕)

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, indépendantes et de même loi. Notons $Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ et $Y_2 = \frac{X_2}{X_1+X_2}$.

1. *Montrer que Y_1 admet une espérance puis la calculer.*
2. *Montrer que Y_1 admet une variance puis calculer la covariance de Y_1 et Y_2 en fonction de celle-ci.*

Exercice 10.10 (☕☕)

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n) \leq \mathbf{E}(X) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n).$$

Exercice 10.11 (☕☕)

1. *Soit X une variable aléatoire bornée telle qu'il existe X_1, X_2 des variables indépendantes de même loi que X vérifiant X^2 et X_1X_2 suivent la même loi. Montrer que X est presque sûrement constante.*
2. *Soit X une variable aléatoire positive telle qu'il existe X_1, X_2 des variables indépendantes de même loi que X vérifiant $2X$ et $X_1 + X_2$ suivent la même loi. Montrer que X est presque sûrement constante.*

Exercice 10.12 (☕☕☕)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

1. *Montrer qu'il existe un réel m tel que $\mathbf{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$.*
   Un tel réel est appelé médiane de X.
2. *Supposons que $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$. Montrer que l'application $f : t \mapsto \mathbf{E}(|X - t|)$ admet un minimum global en chaque médiane de X.*
3. *Supposons que $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$. Déterminer le minimum de l'application $g : t \mapsto \mathbf{E}\big((X-t)^2\big)$.*
4. *Supposons que $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que si m est une médiane de X et σ son écart-type, alors $|\mathbf{E}(X) - m| \leq \sigma$.*

Exercice 10.13 (☕☕☕)

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Notons $X \prec Y$ si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(X \geq t) \leq \mathbf{P}(Y \geq t)$.

1. *Montrer que $X \prec Y$ si, et seulement si, pour toute fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ croissante et bornée, $\mathbf{E}(h(X)) \leq \mathbf{E}(h(Y))$.*
2. *Soit X et Y de lois de Poisson de paramètres λ et μ. Montrer que $X \prec Y$ si, et seulement si, $\lambda \leq \mu$.*
3. *Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes telles que $X \prec Y$. Montrer que $\mathbf{P}(X \leq Y) \geq \frac{1}{2}$.*

Miscellanées

Exercice 10.14 (☕☕)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que les variables X et $f(X)$ sont indépendantes. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(f(X) = a) = 1$.

Exercice 10.15 (☕☕☕)

Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. La distance en variations totales entre les lois de X_1 et X_2 est la quantité

$$d_{\mathrm{VT}}(X_1, X_2) = \sup\{|\mathbf{P}(X_1 \in A) - \mathbf{P}(X_2 \in A)|,\ A \subset \mathbb{N}\}.$$

1. *Justifier que, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_1 \in A) - \mathbf{P}(X_2 \in A) = \mathbf{E}\big(\mathbb{1}_{X_1 \neq X_2}(\mathbb{1}_{X_1 \in A} - \mathbb{1}_{X_2 \in A})\big)$.*
2. *En déduire que $d_{\mathrm{VT}}(X_1, X_2) \leq 2\mathbf{P}(X_1 \neq X_2)$.*

Exercice 10.16 (☕☕)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\mathbf{P}(X \leq Y) = 1$.

1. *Montrer que, pour tout entier n, $\mathbf{P}(X > n)\mathbf{P}(Y < n) = 0$.*
2. *En déduire qu'il existe un entier naturel n tel que $\mathbf{P}(X \leq n \leq Y) = 1$.*

Exercice 10.17 (☕☕)

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner un équivalent de $\mathbf{P}(\max\{X, Y\} = n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 10.18 (☕☕)

1. *Considérons une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(T \geq n) > 0$ et notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \mathbf{P}(T = n | T \geq n)$.*
   (a) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in [0, 1[$.*
   (b) *Exprimer $\mathbf{P}(T \geq n)$ en fonction des θ_k. Montrer que la série de terme général θ_n diverge.*
2. *Réciproquement, soit (θ_n) est une suite à valeurs dans $[0, 1[$ telle que la série de terme général θ_n diverge. Montrer qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(T \geq n) > 0$ et $\mathbf{P}(T = n | T \geq n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Inégalités

Exercice 10.19 (☕)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives et que pour tout $t > 0$, la variable e^{tX} admet une espérance. Montrer que

$$\forall a > 0,\ \forall t > 0, \qquad \mathbf{P}(X \geq a) \leq e^{-ta}\mathbf{E}(e^{tX}).$$

Exercice 10.20 (☕)

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = a > 0$.

1. *Montrer que $\mathbf{P}(X \geq 2a) \leq \mathbf{P}\big((X - a + 1)^2 \geq (a+1)^2\big)$.*
2. *Montrer que $\mathbf{P}(X \geq 2a) \leq \frac{1}{a+1}$.*

Exercice 10.21 (☕☕)

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance $\mathbf{E}(X) \geq 0$.

1. *Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda\mathbf{E}(X) + X\mathbb{1}_{X > \lambda\mathbf{E}(X)}$.*
2. *Supposons que $0 < \mathbf{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\mathbf{P}(X > \lambda\mathbf{E}(X)) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.*
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 10.22 (☕☕)

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire positive admettant une variance telle que $\mathbf{E}(X^2) = 1$ et $\mathbf{E}(X) > a$. Montrer que, pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\mathbf{P}(X \geq \lambda a) \geq (1-\lambda)^2 a^2$.

Exercice 10.23 (☕☕)

Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ et $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Définissons la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i$.

1. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \leq \exp(\frac{x^2}{2})$.*
2. *Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\exp(tS_n)$ admet une espérance puis que $\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$.*
3. *Montrer que, pour tout $c > 0$, $\mathbf{P}(S_n \geq c) \leq \exp(-\frac{c^2}{2})$.*
4. *En déduire que, pour tout $c > 0$, $\mathbf{P}(|S_n| \geq c) \leq 2\exp(-\frac{c^2}{2})$.*

Fonctions génératrices

Exercice 10.24 (☕)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $G : t \mapsto \frac{1}{2-t^2}$. Déterminer la loi de X puis de $\frac{X}{2}$.

Exercice 10.25 (☕)

Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ et G sa fonction génératrice.

1. *Montrer que, pour tout $t \geq 1$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{G(t)}{t^a}$.*
2. *En déduire que $\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.*

Exercice 10.26 (☕)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice égale à $G : t \mapsto a\exp(1+t^2)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. *Trouver la valeur de a.*
2. *Déterminer la loi de X.*
3. *Est-ce que X admet une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.*

Exercice 10.27 (☕)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice égale à $G : t \mapsto 1 - \sqrt{1-t}$ pour $|t| < 1$.

1. *Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \geq 0$.*
2. *Soit Y une variable aléatoire indépendante de même loi que X, définie sur le même espace de probabilité que X. Calculer $\mathbf{P}(X + Y = n)$.*
3. *La variable X admet-elle une espérance ?*

Exercice 10.28 (☕☕)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de Bernoulli de paramètre p. Notons T_n l'indice du n-ième « succès ».

1. *Déterminer la loi de T_n.*
2. *Calculer la fonction génératrice de T_n puis en déduire $\mathbf{E}(T_n)$.*

Exercice 10.29 (☕☕☕)

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans une partie dénombrable de $[0,1]$. Montrer que X et Y suivent la même loi si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(X^n) = \mathbf{E}(Y^n)$.

Applications

Exercice 10.30 (☕☕)

Soit E un espace préhilbertien, $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.

1. *Calculer l'espérance de la variable $\|U\|^2$ où et $U = X_1 v_1 + \cdots + X_n v_n$.*
2. *En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$.*
3. *Montrer que $\mathscr{F}$ est orthogonale si, et seulement si, pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$.*
4. *Montrer que si $\mathscr{F}$ n'est pas orthogonale, il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}$.*

Exercice 10.31 (☕)

Soit X, Y des variables indépendantes de loi géométrique de paramètre p. Déterminer la probabilité que la matrice

$$\begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$$

soit nilpotente.

Exercice 10.32 (☕)

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, L la matrice ligne dont les coefficients sont les X_j et $M = L^{\mathrm{T}} L$.

1. *Déterminer les lois des variables $\det(M)$, $\operatorname{tr}(M)$ et $\operatorname{rg}(M)$.*
2. *Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?*
3. *Soit $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $U^{\mathrm{T}} M U$; calculer sa variance dans le cas $n = 2$.*

Exercice 10.33 (☕)

Soit X, Y, Z des variables indépendantes telles que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, Y une loi de Poisson de paramètre μ et Z à valeurs dans $\{\pm 1\}$ avec $p = \mathbf{P}(Z = 1)$. Notons

$$M = \begin{pmatrix} X^2 & Y^2 \\ ZY^2 & X^2 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.*
2. *Déterminer la probabilité que les valeurs propres de M soient réelles.*

Modélisation

Exercice 10.34 (☕)

Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules et on note X le plus petit numéro d'une boule tirée, Y le plus grand. Préciser les lois des variables aléatoires X et Y puis calculer leurs espérances.

Exercice 10.35 (☕)

Soit $n \geq 3$. Une urne contient 2 boules rouges et $n-2$ boules blanches. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.

1. *Déterminer la loi de la variable aléatoire T_1 égale au numéro du tirage de la première boule rouge.*
2. *Déterminer la loi de la variable aléatoire T_2 égale au numéro du tirage de la seconde boule rouge.*

Exercice 10.36 (☕)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Tirons une poignée de boules (les 2^n poignées sont équiprobables) et notons X la somme des valeurs des boules extraites. Déterminer l'espérance de X.
Indication : on pourra écrire X comme une somme de variables indicatrices.

Exercice 10.37 (☕)

Un écosystème compte N individus répartis en r espèces, de proportions respectives $p_1, \dots p_r$. On prélève n individus et on note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le nombre d'espèces dont a prélevé exactement k individus.

1. *Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,*
$$\mathbf{E}(S_k) = \binom{k}{n} \sum_{j=1}^{r} p_j^k (1-p_j)^{n-k}.$$
Indication : on pourra écrire S_k comme somme de variables indicatrices.
2. *En déduire que $\mathbf{E}(S_1)^2 \leq \frac{2n}{n-1} \mathbf{E}(S_0)\mathbf{E}(S_2)$.*

Exercice 10.38 (☕)

Considérons le plan ramené à un repère orthonormé. Une grenouille, initialement à l'origine, fait des sauts unités aléatoires dans l'une des quatre directions selon les axes. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n l'abscisse de la grenouille après n sauts. Calcule $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_n^2)$.

Exercice 10.39 (☕)

Un démarcheur dispose d'une liste de n correspondants qu'il appelle par vagues successives. Chaque appel est indépendant et identique. La probabilité d'obtenir un correspondant lors d'un appel est $p \in]0, 1[$.

- *Lors de la première vague, il appelle les n correspondants : soit X_1 le nombre de correspondants obtenus.*
- *Lors de la deuxième vague, il appelle les $n - X_1$ correspondants absents lors de la première vague : soit X_2 le nombre de correspondants lors de cette vague d'appels.*
- *Et ainsi de suite.*

1. *Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?*
2. *Déterminer les lois de la variable Y_i qui indique le numéro de la vague à laquelle le correspondant numéro i répond enfin, de la variable X_1, de la variable X_2,...*

Exercice 10.40 (☕☕)

Considérons une urne comportant n boules blanches et n boules rouges. On procède à des tirages sans remise jusqu'à obtenir une urne de composition monochrome. Déterminer le nombre moyen de boules restant alors dans l'urne.

Exercice 10.41 (☕☕☕)

Une urne contient initialement des boules numérotées de 1 à n. On tire une boule et on lit k son numéro :

— *si $k = 1$, l'expérience s'achève ;*

— *sinon, on enlève de l'urne toutes les boules avec un numéro supérieur ou égal à k et on procède à un nouveau tirage.*

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages de l'expérience.

1. *Montrer que, pour $n > 2$ et $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(X_{k-1} = j-1)$, puis en déduire que*

$$\mathbf{P}(X_n = j) = \tfrac{n-1}{n}\mathbf{P}(X_{n-1} = j) + \tfrac{1}{n}\mathbf{P}(X_{n-1} = j-1).$$

   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, G_n la fonction génératrice de X_n.

2. *Calculer $G_1(t)$ puis montrer que $G_n(t) = \frac{n-1-t}{n}G_{n-1}(t)$.*
3. *Donner la loi de X_n.*
4. *Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_{n-1})$ puis déterminer un équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$.*

Exercice 10.42 (☕☕)

On dispose n jetons bicolores blanc/rouge avec initialement $m \in [\![0, n]\!]$ faces rouges visibles. À chaque étape, on choisit successivement deux jetons au hasard ; si le second n'est pas de la même couleur que le premier, on le retourne. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_k égale au nombre de faces rouges visibles après k étapes.

Exercice 10.43 (☕☕)

Soit $s > 1$ et $\mathbf{P}$ la probabilité sur $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \qquad \mathbf{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}.$$

Pour tout nombre premier p, on définit une variable aléatoire $X_p : n \mapsto v_p(n)$ où $v_p(n)$ désigne l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n.

1. *Montrer que, pour tout $p \in \mathscr{P}$, la variable $X_p + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.*
2. *Montrer que les variables aléatoires $(X_p)_{p\in\mathscr{P}}$ sont indépendantes.*
3. *En déduire l'identité suivante*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

11 – Espaces vectoriels normés

Normes

Exercice 11.1 (☕)

Posons, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \int_0^1 |x - ty| \,\mathrm{d}t$.

1. *Vérifier que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer $N(x, 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
3. *En déduire l'expression de $N(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Exercice 11.2 (☕)

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N. Montrer que l'application $N' : (x_1, x_2) \mapsto \max\{N(x_1), N(x_2), N(x_1 - x_2)\}$ est une norme sur E^2.

Exercice 11.3 (☕)

Montrer que l'application $N : \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{k} + \left|\sum_{k=0}^n a_k\right|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11.4 (☕)

Montrer que l'application $P \mapsto \sup\{|P(t) - P'(t)|,\ t \in [0, 1]\}$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11.5 (☕)

Définissons, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sup\{|P(t)|,\ t \in [-1, 1]\}$, $N_2(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$.

1. *Justifier que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Étudier la convergence de la suite (P_n) avec $P_n = \frac{1}{n} X^n$ pour les normes N_1 et N_2.*

Exercice 11.6 (☕)

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Posons, pour tout $u \in E$, $N(u) = \sup\{|u_n| + |u_{2n}|,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. *Montrer que N est une norme sur E.*
2. *Comparer N et $\| \ \|_\infty$.*

Exercice 11.7 (☕)

1. *Justifier que l'ensemble E des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes est un espace vectoriel.*
   Posons, pour tout $f \in E$,
   $$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \qquad N(f) = |f(0)| + \sup_{x \neq 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right|.$$
2. *Montrer que $\| \ \|$ et N sont des normes sur E.*

Exercice 11.8 (☕)

Soit E l'espace des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. Posons, pour tout $f \in E$, $N(f) = \|f''\|_\infty$.

1. *Montrer que N est une norme sur E.*
2. *Comparer N et $\| \|_\infty$.*

Exercice 11.9 (☕☕)

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\theta_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n \,\mathrm{d}t$.

1. *Justifier, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, l'existence de $N(P) = \sup\{|\theta_n(P)|,\ n \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.*

Exercice 11.10 (☕☕)

Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $x \mapsto \left\| \sum_{k=1}^n x_k f_k \right\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Boules

Exercice 11.11 (☕)

Soit E un espace vectoriel normé, $x, y \in E$, $r > 0$. Déterminer les $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\mathscr{B}(x,r) \subset \mathscr{B}(y,\rho)$.

Exercice 11.12 (☕)

Soit E un espace vectoriel normé, $x, x' \in E$, $r, r' > 0$. Montrer que l'ensemble $\{y + y',\ y \in \mathscr{B}(x,r), y' \in \mathscr{B}(x',r')\}$ est une boule dont on précisera centre et rayon.

Exercice 11.13 (☕)

Soit E un espace vectoriel normé, $x, x' \in E$, $r, r' > 0$ tel que $\overline{\mathscr{B}}(x,r) = \overline{\mathscr{B}}(x',r')$. Montrer que $x = x'$ et $r = r'$.

Exercice 11.14 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$. Déterminer $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}(x,r))$.

Exercice 11.15 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N et N'.

1. *Montrer que si $\mathscr{B}(0_E,1) \subset \mathscr{B}'(0_E,1)$, alors $N'(x) \leq N(x)$ pour tout $x \in E$.*
2. *Soit $r, r' > 0$. Traduire l'inclusion $\mathscr{B}(0_E,r) \subset \mathscr{B}'(0_E,r')$ en une inégalité sur les normes.*
3. *Que dire de deux normes qui admettent la même boule unité ouverte ?*

Ouverts et fermés

Exercice 11.16 (☕☕)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, à la fois fermée et ouverte. Montrer que $A = \mathbb{R}$.
Indication : pour $x_0 \in A$, on pourra considérer $a = \inf\{t \in \mathbb{R},\ ]t, x_0] \subset A\}$ et $b = \sup\{t \in \mathbb{R},\ [x_0, t[\subset A\}$.

Exercice 11.17 (☕)

Soit E un espace vectoriel normé, A un ouvert de E et B une partie (quelconque) de E. Montrer que $\{a+b,\ a \in A, b \in B\}$ est ouvert.

Exercice 11.18 (☕)

Soit E un espace vectoriel normé et A un ouvert de E. Montrer que la réunion des boules fermées $\overline{\mathscr{B}}(a,1)$ pour $a \in A$ est un ouvert.

Exercice 11.19 (☕☕)

Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Déterminer la nature topologique de l'ensemble des fonction $f \in E$ telles que $f(0) = f(1)$.

Exercice 11.20 (☕☕☕)

Soit $n > k > 0$ des entiers. Déterminer la nature topologique de l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang strictement inférieur à k.

Exercice 11.21 (☕☕☕)

Montrer que l'ensemble des couples de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendants est un ouvert.

Exercice 11.22 (☕☕)

1. *Soit F un fermé non vide de $[0,1]$, $x_0 \in F$ et*

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + d(x,F) & \text{si } x \leq x_0, \\ x - d(x,F) & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que l'ensemble des points fixes de f est F.

2. *En déduire que tout fermé de $[0,1]$ est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.*

Exercice 11.23 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel normé. Pour toute partie $A \subset E$, posons $A^* = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ [a,x] \subset A\}$.

1. *Montrer que si A est un fermé, alors A^* est aussi un fermé.*
2. *Trouver un contre-exemple à l'implication réciproque.*

Intérieur et adhérence

Exercice 11.24 (☕☕)

Montrer que l'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe d'un espace vectoriel normé est convexe.

Exercice 11.25 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel normé. Le diamètre d'une partie $A \subset E$ bornée non vide est

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{N(x-y),\ x,y \in A\}.$$

Montrer que, pour toute partie $A \subset E$ bornée non vide, A et $\overline{A}$ ont le même diamètre.

Exercice 11.26 (☕)

Soit E un espace vectoriel normé, A et B de E telles que, pour tout $x \in E$, $d(x,A) = d(x,B)$. Montrer que $\overline{A} = \overline{B}$.

Exercice 11.27 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel normé, A et B deux ouverts disjoints. Montrer que l'intérieur de $\overline{A}$ et l'intérieur de $\overline{B}$ sont disjoints.

Exercice 11.28 (☕☕)

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E.

1. *Montrer que A est un ouvert si, et seulement si, A ne rencontre pas sa frontière.*
2. *Proposer une caractérisation analogue d'une partie fermée.*

Exercice 11.29 (☕☕☕)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et C une partie convexe de E telle que $\overline{C} = E$. Montrer que $C = E$.
Indication : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E.

Suites matricielles

Exercice 11.30 (☕)

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^k \to P$, $B^k \to Q$.

1. *Montrer que $P^2 = P$.*
2. *Comparer AP et PA.*
3. *Montrer que si $AB = BA$, alors $PQ = QP$.*

Exercice 11.31 (☕)

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et (B_k) une suite de matrices semblables à A qui converge vers B. Montrer que B est semblable à A.*
2. *Montrer que le résultat n'est plus vrai si on ne suppose plus la matrice A diagonalisable.*

Exercice 11.32 (☕)

Soit (A_k) une suite de matrices inversibles telles que $A_k \to P$, et $A_k^{-1} \to Q$. Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = Q$.

Exercice 11.33 (☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $4A^3 + 2A^2 + A = 0_n$.

1. *Montrer que la suite (A^k) converge et déterminer sa limite.*
2. *Déterminer A.*

Exercice 11.34 (☕☕)

Soit A une matrice antisymétrique. Montrer que si la suite (A^k) converge, alors sa limite est la matrice nulle.

Exercice 11.35 (☕☕)

1. *Montrer que toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles.*
2. *Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.*

Exercice 11.36 (☕)

Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Continuité

Exercice 11.37 (☕☕)

Soit (E,N) un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, $k>0$ puis $f: A \to \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne.

1. *Soit $x \in E$. Montrer que $\{kN(x-y)+f(y),\ y \in A\}$ admet une borne inférieure. On la note $g(x)$.*
2. *Montrer que l'application g est k-lipschitzienne.*
3. *Vérifier que $g_{|A} = f$.*

Exercice 11.38 (☕☕)

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, posons $N_1(P) = \sup\{|P(t)|,\ t \in [0,1]\}$ et $N_2(P) = \sup\{|P(t)|,\ t \in [1,2]\}$. On admet que les applications N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$. Considérons la forme linéaire $\varphi : P \mapsto P(0)$ sur $\mathbb{R}[X]$.

1. *Montrer que φ est continue pour N_1.*
2. *En introduisant les polynômes $(1-\frac{X}{2})^n$, montrer que φ n'est pas continue pour N_2.*

Exercice 11.39 (☕☕)

1. *Montrer que, pour tout $n>0$, il existe une constante c_n telle que $|P'(0)| \leq c_n \|P\|_{\infty,[0,1]}$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.*
2. *Montrer que $c_n \to +\infty$.*
3. *L'application $P \mapsto P'(0)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme uniforme sur le segment $[0,1]$?*

Exercice 11.40 (☕☕)

Soit A, B deux fermés disjoints d'un espace vectoriel normé E. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 11.41 (☕☕)

1. *Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il toujours une fonction $\varphi : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue telle que $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = B$?*
2. *Reprendre la question en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.*

Exercice 11.42 (☕☕☕)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ si, et seulement si, il existe C tel que $\|u(x)\| \leq C\|u^2(x)\|$ pour tout $x \in E$.

12 – Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Exercice 12.1 (☕☕)

Soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable sur I, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad [A]_{i,j} = \int_I f_i(t) f_j(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que l'application $(X, Y) \mapsto X^{\mathrm{T}} AY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 12.2 (☕☕)

Soit (P_n) une suite de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ rendant la famille (P_n) orthonormée.

Exercice 12.3 (☕)

Soit E un espace préhilbertien réel, une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$.

1. *Supposons E de dimension finie. Montrer l'équivalence entre les propriétés*
   - $\|x_n - x\| \to 0$,
   - *pour tout $y \in E$, $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$.*
2. *Montrer que l'équivalence ne demeure pas en dimension infinie.*

Exercice 12.4 (☕☕)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leq 4\int_0^1 t^2 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12.5 (☕)

Soit E un espace préhilbertien réel, f, g des applications de E dans E telles que $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$ pour tous x, $y \in E$. Montrer que f et g sont des endomorphismes.

Exercice 12.6 (☕)

Soit E un espace euclidien et $u : E \to E$ une application telle que $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous x, $y \in E$.

1. *Montrer que l'image d'une base orthonormée de E par u est une base orthonormée de E.*
2. *Montrer que u est un endomorphisme.*

Exercice 12.7 (☕)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Exercice 12.8 (☕)

Considérons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Montrer que l'orthogonal du sous-espace des matrices diagonales est le sous-espace des matrices à diagonale nulle.

Exercice 12.9 (☕☕)

Soit E un espace euclidien, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces tels que, pour tous $i \neq j$, $x \in F_i$, $y \in F_j$, $\langle x, y\rangle = 0$. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.

Exercice 12.10 (☕☕)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs telle que, pour tous $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| = 1$. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Exercice 12.11 (☕☕☕)

Soit E un espace euclidien et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs telle que, pour tous $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle < 0$. Montrer que $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est libre.

Familles orthogonales

Exercice 12.12 (☕)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tous $P, Q \in E$, posons $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$.

1. *Justifier que $\langle \ , \ \rangle$ est un produit scalaire sur E.*
2. *Montrer que les polynômes de Tchebychev forment une base orthogonale de E.*
3. *Montrer que les polynômes de Tchebychev sont scindés à racines simples dans $[-1, 1]$.*

Exercice 12.13 (☕)

Soit $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$.

1. *Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi^{(n)} : x \mapsto P_n(x)e^{-x^2}$.*
2. *Montrer que (P_n) est une famille orthogonale pour le produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.*
3. *Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que P_n admet n racines réelles distinctes.*

Exercice 12.14 (☕☕)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini, pour tous $P, Q \in E$, par $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ puis $L_k : x \mapsto \frac{(-1)^k}{k!} e^x f_k^{(k)}(x)$.

1. *Justifier que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, L_k polynomiale ; préciser son degré et son coefficient dominant.*
2. *Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E.*

Exercice 12.15 (☕☕)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Notons $(B_0, \dots, B_n)$ la base orthonormalisée par l'algorithme de Gram-Schmidt à partir de la base canonique de E, puis, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = ((X^2 - 1)^k)^{(k)}$

1. *Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E.*
2. *Montrer que, pour tout $k \le n$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $P_k = \lambda_k B_k$.*

Exercice 12.16 (☕☕)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs de E telle que

$$\forall x\in E,\qquad \|x\|^2=\sum_{k=1}^{p}\langle x,e_k\rangle^2.$$

Montrer que $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 12.17 (☕☕)

Soit E un espace euclidien de dimension n, $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. *Montrer que, pour tous $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$,*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\Big\|^2\le\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2\Big).$$

2. *En déduire que, si $\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2<1$, alors la famille $(e_1+x_1,\dots,e_n+x_n)$ est une base de E.*

Exercice 12.18 (☕☕)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. *Montrer que si la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base, alors pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une famille $(f_1,\dots,f_n)$ de vecteurs de E telle que, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $[A]_{i,j}=\langle e_i,f_j\rangle$.*
2. *Étudier la réciproque.*

Exercice 12.19 (☕☕)

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est orthogonale.

Exercice 12.20 (☕☕)

Considérons $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, u, v deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^n$ et

$$g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}\\(a,b)&\mapsto&\|au+bv\|\end{array}\right.$$

1. *Montrer qu'il existe $m>0$ tel que, pour tout (a,b) vérifiant $a^2+b^2=1$, $g(a,b)\ge m$.*
2. *En déduire que, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $g(a,b)\ge m\sqrt{a^2+b^2}$.*
3. *Soit $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x_1<x_2<\cdots<x_N$. Notons $f:(a,b)\mapsto\sum_{k=1}^{n}(y_k-ax_k-b)^2$. Montrer que $f(a,b)\to+\infty$ quand $\|(a,b)\|\to+\infty$.*
4. *Montrer que f atteint sa borne inférieure. Interpréter géométriquement ce résultat.*

Projecteurs orthogonaux

Exercice 12.21 (☕)

Soit E un espace euclidien.

1. *Montrer qu'un projecteur p de E est orthogonal si, et seulement si, $\|p(x)\|\le\|x\|$ pour tout $x\in E$.*

2. *Soit p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que les valeurs propres de $p\circ q$ appartiennent à l'intervalle* $[0,1]$.

Exercice 12.22 (☕☕)

Soit E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que $p\circ q$ est un projecteur si, et seulement si, $p\circ q = q\circ p$.

Exercice 12.23 (☕☕)

Soit E un espace euclidien de base orthonormée $\mathscr{B}$, F un sous-espace de base orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ et p la projection orthogonale sur F. Montrer que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(e_k)\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(e_k)^{\mathrm{T}}.$$

Exercice 12.24 (☕☕)

Soit E un espace euclidien, F, G deux sous-espaces. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si, et seulement si, pour tout $x\in E$, $\|x\|^2 = d(x,F)^2 + d(x,G)^2$.

Distance à un sous-espace

Exercice 12.25 (☕)

Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(A,B)\mapsto \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$ et le sous-espace

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

1. *Déterminer une base orthonormée de F.*
2. *En déduire la distance à F de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 12.26 (☕)

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(A,B)\mapsto \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$.

1. *Montrer que, pour tout $S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et tout $A\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, $\langle S,A\rangle = 0$.*
2. *Calculer, pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\inf\left\{\sum_{i,j}([M]_{i,j}-[S]_{i,j})^2,\ S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\right\}$.*

Exercice 12.27 (☕)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall P,Q\in E,\qquad \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la distance du polynôme X^3+X^2+X+1 au sous-espace vectoriel $F = \left\{P\in E,\ \langle X^2-1,P'\rangle = \langle X,P\rangle\right\}$.

Exercice 12.28 (☕☕)

On admet que l'application $(P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *définit bien un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$. *Posons* $\Pi_0 = 1$, *et, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_k = \prod_{i=1}^{k}(X+i)$.

1. *Montrer qu'il existe* $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $\prod_{i=1}^{n}(X-i) = \sum_{k=0}^{n} p_k \Pi_k$. *Préciser* p_0.
2. *Montrer que le polynôme* $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ *est orthogonal à* $\mathrm{Vect}(X, \dots, X^n)$.
3. *Calculer la distance de* 1 *à* $\mathrm{Vect}(X, \dots, X^n)$ *puis celle de* X^n *à* $\mathrm{Vect}(1, \dots, X^{n-1})$.

Exercice 12.29 (☕)

Soit $a \in \mathbb{R}$. *On munit* $\mathbb{R}_n[X]$ *du produit scalaire défini par* $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$.
Calculer, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\inf\{\|P-Q\|,\ Q \in \mathbb{R}_n[X],\ Q(a) = 0\}$.

Exercice 12.30 (☕☕)

Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. *Posons, pour tous* $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

1. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels* $a_0, \dots, a_n$ *pour que* $\langle\ ,\ \rangle$ *soit un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$.
2. *Calculer la distance de* X^n *au sous-espace* $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$.

Exercice 12.31 (☕☕)

Soit E *l'espace des fonctions de classe* $\mathscr{C}^2$ *de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni du produit scalaire défini, pour tous* $f, g \in E$, *par*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Notons U *l'espace des fonctions* $f \in E$ *telles que* $f(0) = f(1) = 0$ *et* V *l'espace des fonctions* $f \in E$ *telles que* $f'' = f$.

1. *Montrer que les sous-espaces* U *et* V *sont supplémentaires orthogonaux dans* E.
2. *Préciser la projection orthogonale sur* V.
3. *Notons, pour* $a, b \in \mathbb{R}$, $E_{a,b} = \{f \in E,\ f(0) = a,\ f(1) = b\}$. *Calculer* $\inf\left\{\int_0^1 f(t)^2 + f'(t)^2\,\mathrm{d}t,\ f \in E_{a,b}\right\}$.

Exercice 12.32 (☕☕)

Soit E *un espace euclidien. La matrice de Gram des vecteurs* $x_1, \dots, x_n$ *est la matrice* $G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$.

1. *Montrer qu'une famille* $(x_1, \dots, x_n)$ *est libre si, et seulement si, la matrice* $G(x_1, \dots, x_n)$ *est inversible.*
2. *Soit* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base orthonormale. Montrer que* $\det G(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)^2$.
3. *Soit* F *un sous-espace de* E *de base* $(x_1, \dots, x_p)$ *et* $x \in E$. *Montrer que* $d(x,F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$.

Exercice 12.33 (☕☕)

Soit E *un espace euclidien de base orthonormée* $(e_1, \dots, e_n)$ *et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} d(e_k, F)^2 = n - \dim F.$$

13 – Endomorphismes d'un espace euclidien

Isométries

Exercice 13.1 (☕)

Soit E un espace euclidien. Déterminer les endomorphismes $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que, pour tout sous-espace F, $u(F^\perp) = u(F)^\perp$.

Exercice 13.2 (☕)

Soit F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E de même dimension. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{O}(E)$ tel que $u(F) = G$.

Exercice 13.3 (☕☕)

Soit $u \in \mathscr{O}(E)$). Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 13.4 (☕☕)

Considérons E un espace euclidien. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que, pour tous vecteurs x, $y \in E$ orthogonaux, $\langle u(x), u(y)\rangle = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathscr{O}(E)$ tels que $u = \lambda v$.

Exercice 13.5 (☕☕)

Considérons E un espace euclidien. Soit u, $v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes tels que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|v(x)\|$. Montrer qu'il existe $w \in \mathscr{O}(E)$ tel que $u = v \circ w$.

Exercice 13.6 (☕☕)

Considérons E un espace euclidien puis u, $v \in \mathscr{O}(E)$ tels que $\frac{1}{2}(u+v) \in \mathscr{O}(E)$. Montrer que $u = v$.

Exercice 13.7 (☕☕)

Soit E un espace euclidien, $p \geq 1$, $x_1, \dots, x_p$, $y_1, \dots, y_p \in E$. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{O}(E)$ telle que, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $u(x_i) = y_i$ si, et seulement si,

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \qquad \langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle.$$

Exercice 13.8 (☕☕)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{O}(E)$. Montrer que la multiplicité d'une valeur propre dans le polynôme caractéristique de u est la dimension du sous-espace propre associé.

Exercice 13.9 (☕)

Soit E un espace euclidien, H_1, H_2 deux hyperplans, σ_1 et σ_2 les réflexions associées. Notons $H_3 = \sigma_2(H_1)$ et σ_3 la réflexion associée. Montrer que $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_3$.

Matrices orthogonales

Exercice 13.10 (☕)

Déterminer les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures.

Exercice 13.11 (☕)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. *Montrer les inégalités suivantes*

1. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq n^{\frac{3}{2}}$,
2. $\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Exercice 13.12 (☕)

Déterminer a, b, $c \in \mathbb{R}$ *tels que la matrice*

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & a & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ c & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

soit une matrice orthogonale.

Exercice 13.13 (☕)

Soit a, b *et* $c \in \mathbb{R}$; *notons* $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice A *est orthogonale si, et seulement si,* $\sigma_2 = 0$ *et* $|\sigma_1| = 1$.

Exercice 13.14 (☕)

1. *Déterminer les couples* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   soit une matrice orthogonale.
2. *Pour un tel couple, déterminer les éléments propres de* A.

Exercice 13.15 (☕)

Reconnaître les isométries de $\mathbb{R}^3$ *dont les matrices dans la base canonique sont*

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.16 (☕)

Déterminer les rotations de $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est de la forme*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ b & 2 & a \\ a & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.17 (☕)

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe dirigé par $(1,1,1)$.

Matrices symétriques

Exercice 13.18 (☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}}$. Montrer que $A = 0_n$.

Exercice 13.19 (☕☕)

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\mathrm{T}}SX \geq 0$.

1. *Montrer que, pour tout i, $[S]_{i,i} \geq 0$.*
2. *Montrer que, pour tous $i \neq j$, $[S]_{i,j}^2 \leq [S]_{i,i}[S]_{j,j}$.*
3. *En déduire que*
$$\max_{i,j}[S]_{i,j} = \max_{i,j}|[S]_{i,j}|.$$

Exercice 13.20 (☕☕)

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(SP) \leq \operatorname{tr} S$.

Exercice 13.21 (☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^{\mathrm{T}}X = n$, $X^{\mathrm{T}}AX = \operatorname{tr} A$.
Indication : introduire la partie symétrique de la matrice A.

Exercice 13.22 (☕☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique ; notons $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\}$ et, pour tout vecteur propre X de A de norme 1 (pour la norme euclidienne canonique), $F(A,X) = \inf\left\{\operatorname{tr}((A - tXX^{\mathrm{T}})^2),\ t \in \mathbb{R}\right\}$ puis $m(A)$ la borne inférieure des $F(A,X)$. Montrer que $m(A) = \operatorname{tr}(A^2) - \rho(A^2)$.

Exercice 13.23 (☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre les propositions
- *A admet une famille libre de k vecteurs propres,*
- *il existe une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives de rang k telle que $AS = SA^{\mathrm{T}}$.*

Exercice 13.24 (☕☕)

Soit E un espace euclidien, $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $u : E \to E$ l'application $u : x \mapsto \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$.

1. *Montrer que u est un endomorphisme de E. Est-il bijectif ?*
2. *Montrer que u est symétrique.*
3. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(e_1,\dots,e_n)$ pour que u soit un projecteur.*

Exercice 13.25 (☕)

Soit E un espace euclidien, p et q des projecteurs orthogonaux. Montrer que $\operatorname{Sp}(p+q) \subset [0,2]$.

Exercice 13.26 (☕☕)

Soit E un espace euclidien.

1. *Soit u un endomorphisme de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que $\operatorname{tr} u = \sum_{k=1}^{n} \langle u(e_k), e_k \rangle$.*
2. *Soit u un endomorphisme symétrique de E à valeurs propres positives. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle \geq 0$.*
3. *Soit u, v deux endomorphismes symétriques à valeurs propres positives. Montrer que $\operatorname{tr}(u \circ v) \geq 0$.*

Exercice 13.27 (☕☕)

Une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

1. *Montrer qu'une matrice A symétrique est définie positive si, et seulement si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, $X^{\mathrm{T}} A X > 0$.*
2. *Soit A symétrique définie positive. Montrer que A^{-1} est symétrique définie positive puis que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|X\|^4 \leq X^{\mathrm{T}} A X . X^{\mathrm{T}} A^{-1} X$. Étudier le cas d'égalité.*

Exercice 13.28 (☕)

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. Montrer que u est k-lipschitzien si, et seulement si, toutes les valeurs propres de u sont de valeur absolue inférieure ou égale à k.

Exercice 13.29 (☕☕)

Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\langle u(e_k), e_k \rangle = \lambda_k$. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(e_k) = \lambda e_k$.

Exercice 13.30 (☕☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres et $(X_1, \dots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.

1. *Posons $V_k = \operatorname{Vect}(X_1, \dots, X_k)$. Montrer que $\lambda_k = \max\{X^{\mathrm{T}} A X,\ X \in V_k,\ \|X\| = 1\}$.*
2. *Notons $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k. Montrer que*

$$\lambda_k = \min_{V \in \mathcal{E}_k} \max\{X^{\mathrm{T}} A X,\ X \in V,\ \|X\| = 1\}.$$

Indication : on pourra montrer que, pour tout $V \in \mathcal{E}_k$, $V \cap V_{k-1}^{\perp}$ n'est pas réduit à 0_E.

Exercice 13.31 (☕☕☕)

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Posons $\mathcal{A} = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ \|X\| = \|Y\| = 1 \text{ et } \langle X, Y \rangle = 0\}$ où $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. *Soit X, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ unitaires et orthogonaux. Montrer que $(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}) \in \mathcal{A}$.*
2. *Montrer que $\lambda_n - \lambda_1 = 2 \sup\{|X^{\mathrm{T}} S Y|,\ (X, Y) \in \mathcal{A}\}$.*

Matrices antisymétriques

Exercice 13.32 (☕)

Notons, pour toute matrice M, $\varphi_M : X \mapsto X^{\mathrm{T}} M X$. Montrer que toute matrice M se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A puis que $\varphi_M = \varphi_S$.

Exercice 13.33 (☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres strictement positives. Montrer que $A+S$ est inversible.

Exercice 13.34 (☕☕)

1. *Montrer que les valeurs propres complexes d'une matrice antisymétrique réelle sont imaginaires pures.*
2. *Soit A une matrice n'admettant par 1 comme valeur propre. Montrer que les matrices $\mathrm{I}_n + A$ et $(\mathrm{I}_n - A)^{-1}$ commutent.*
3. *Montrer que l'application $A \mapsto (\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n - A)^{-1}$ réalise une bijection de l'espace des matrices antisymétriques réelles dans l'ensemble des matrices orthogonales n'admettant pas -1 comme valeur propre. On précisera la bijection réciproque.*

Exercice 13.35 (☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et inversible.

1. *Montrer que n est pair.*
2. *Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 13.36 (☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^{\mathrm{T}} = A^2$.

1. *Diagonaliser la matrice symétrique $A^{\mathrm{T}} A$.*
2. *Montrer que A est orthogonalement semblable à l'une des matrices suivantes : 0_2, I_2, $E_{1,1}$,*

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.37 (☕☕☕)

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si, et seulement si, pour toute matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle.

14 – Fonctions à valeurs vectorielles

Dérivabilité des fonctions vectorielles

Exercice 14.1 (☕)

Soit E un espace euclidien et $f : I \to E$ deux fois dérivable telle que $t \mapsto \|f(t)\|$ est constante. Montrer que $t \mapsto \langle f(t), f''(t)\rangle$ est à valeurs négatives.

Exercice 14.2 (☕)

Soit n un entier impair et $f : \mathbb{R} \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14.3 (☕☕)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$, $|f(t)| = 1$. Montrer qu'il existe $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$, $f(t) = e^{i\theta(t)}$.

Exercice 14.4 (☕)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\det(f(a), f(b) f'(c)) = 0$.

Exercice 14.5 (☕☕)

Soit E un espace euclidien, $f : [a,b] \to E$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\|f(b) - f(a)\| \leq (b-a)\|f'(c)\|$.
Indication : on pourra introduire la fonction réelle $\varphi : t \mapsto \langle f(t), f(b) - f(a)\rangle$.

Tracés

Exercice 14.6 (☕☕)

Considérons l'arc paramétré plan défini par $M : t \mapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$.

1. *Tracer le support de l'arc M.*
2. *Soit t_1, t_2, $t_3 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Montrer que les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont alignés si, et seulement si, $t_1 t_2 t_3 = -1$.*
3. *Montrer que les tangentes en trois points de M alignés recoupent le support de M en trois points alignés.*

Exercice 14.7 (☕)

Tracer l'arc paramétré plan défini par $M : t \mapsto \left(\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t}\right)$.

Exercice 14.8 (☕)

Considérons l'arc paramétré plan défini par $M : t \mapsto \left(t - \operatorname{th} t, \frac{1}{\operatorname{ch} t}\right)$.

1. *Tracer le support de l'arc M.*
2. *Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner les coordonnées du point $N(t)$, intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à l'arc en $M(t)$. Que remarque-t-on pour la longueur $M(t)N(t)$?*

Exercice 14.9 (☕)

Déterminer les droites à la fois tangentes et normales au support de l'arc paramétré $M : t \mapsto (2t^3, 3t^2)$.

Exercice 14.10 (☕☕)

Soit $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *un arc paramétré de classe* $\mathscr{C}^1$, *régulier ne passant pas par* 0. *Supposons qu'il existe* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tel que la distance* $OM(t_0)$ *soit égale à* $\min\{OM(t),\ t \in \mathbb{R}\}$. *Montrer que la tangente à l'arc en* t_0 *est perpendiculaire à la droite* $(OM(t_0))$.

Exercice 14.11 (☕☕)

Considérons les fonctions de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $u : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ *et* $v : \theta \mapsto (-\sin\theta, \cos\theta)$.

1. *Calculer les dérivées de* u *et* v.
   Soit p, q *deux fonctions réelles dérivables. Considérons l'arc paramétré* $M : \theta \mapsto p(\theta)u(\theta) + q(\theta)v(\theta)$.
2. *Déterminer à quelle condition, sur* p *et* q, *le vecteur-dérivé de* M *est colinéaire à* u.
   Supposons dorénavant que cette condition n'est pas réalisée.
3. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Préciser la distance entre* $M(\theta)$ *et le point d'intersection de la tangente à l'arc* M *en* θ *et la droite passant par l'origine et dirigée par* $u(\theta)$.

Calculs de longueur

Exercice 14.12 (☕)

Calculer la longueur des arcs paramétrés suivants :

1. $M : t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$
2. $M : t \mapsto ((1 + \cos^2 t)\sin t, \sin^2 t \cos t)$
3. $M : t \mapsto \left(\int_0^t e^{-u}(1 - \cos u)\,\mathrm{d}u, \int_0^t e^{-u} \sin u\,\mathrm{d}u\right)$

Exercice 14.13 (☕☕)

Considérons les fonctions de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^2$: $u : \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ *et* $v : \theta \mapsto (-\sin\theta, \cos\theta)$. *Soit* $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *telle qu'il existe* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *vérifiant*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \rho(\theta) + \rho(\theta + \pi) = a.$$

Calculer la longueur de l'arc paramétré $M : \theta \mapsto \rho(\theta)u(\theta) + \rho'(\theta)v(\theta)$.

15 – Équations différentielles

Résolution pratique

Exercice 15.1 (☕)

Montrer que les solutions sur $]-1,1[$ *de l'équation* $(1-x^2)\,y' - x\,y = 1$ *sont développables en série entière.*

Exercice 15.2 (☕☕)

Déterminer la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ *de l'équation* $(\cos^3 x)\,y' + (2\sin x)\,y = 0$.

Exercice 15.3 (☕☕)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n *l'unique solution de l'équation différentielle* $(n+1)\,y'' - (2n+1)\,y' + n\,y = 0$ *vérifiant les conditions initiales* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 1$.

1. *Déterminer* y_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *; montrer que la suite de fonctions* (y_n) *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Montrer que, pour tout* $x < 0$, $0 \le e^x - 1 - x \le \frac{x^2}{2}$.
3. *En déduire que la suite de fonctions* (y_n) *converge uniformément sur tout segment de* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15.4 (☕)

Résoudre l'équation $y'' + y = \cos^3 x$.

Exercice 15.5 (☕)

Résoudre, selon la valeur de λ*, l'équation* $y'' + \lambda\,y' + 4\,y = e^x$.

Exercice 15.6 (☕)

Soit (E) *l'équation différentielle* $y'' + \left(1+\frac{2}{x}\right)y' + \left(1+\frac{1}{x}\right)y = 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

1. *En posant* $z = x\,y$*, trouver l'ensemble des solutions de* (E).
2. *Déterminer les solutions prolongeables par continuité sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15.7 (☕)

Considérons l'équation (E) *:* $y'' - 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1. *Montrer que* y *est solution de* (E) *si, et seulement si,* $z : x \mapsto e^{-x}\,y(x)$ *est solution d'une équation différentielle plus simple.*
2. *Résoudre* (E).

Exercice 15.8 (☕)

Soit y *une solution sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de l'équation différentielle* $x^2\,y'' - 2\,y = x$.
Montrer que $z : t \mapsto y(e^t)$ *est solution d'une équation différentielle simple puis en déduire l'expression de* y.

Exercice 15.9 (☕)

Résoudre l'équation $2x(1-x)\,y'' + (2-5x)\,y' - y = 0$.
Indication : on pourra chercher les solutions développables en série entière.

Études quantitatives

Exercice 15.10 (☕☕)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodique. Montrer que l'équation différentielle $y'+y=f$ une unique solution 1-périodique.

Exercice 15.11 (☕☕)

Déterminer les solutions bornées sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y'-y=\ln x$.

Exercice 15.12 (☕☕)

Considérons l'équation différentielle (E) $y'-y=\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. *Montrer que (E) possède une unique solution f bornée au voisinage de $+\infty$.*
2. *Montrer que $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+O(\frac{1}{x^3})$.*

Exercice 15.13 (☕☕)

Montrer que l'équation $y''-y=a|x|+b$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative admet des asymptotes en $\pm\infty$.

Équations fonctionnelles

Exercice 15.14 (☕)

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $f'(x)-f(x)=\exp(x)\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 15.15 (☕☕)

Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $f''(x)+f(-x)=\cos x+\sin x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Endomorphismes « différentielle »

Exercice 15.16 (☕)

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme u de l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ défini, pour tout $f\in E$ par $u(f):x\mapsto\int_0^1 \inf\{t,x\}f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15.17 (☕☕)

Considérons l'endomorphisme $u(f):x\mapsto f'(x)+xf(x)$ de l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de u.

Systèmes différentiels

Exercice 15.18 (☕)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + \cos t \end{cases}$$

Exercice 15.19 (☕)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = x + 2y + te^{t} \\ y' = 8x + y + e^{-t} \end{cases}$$

Exercice 15.20 (☕)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -x + 3y - 2z \\ y' = -3x + 5y - 2z \\ z' = -3x + 4y - z \end{cases}$$

Exercice 15.21 (☕)

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$$

Exercice 15.22 (☕☕)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible et X une solution de l'équation $X' = AX$. Montrer qu'il existe un hyperplan H de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X(t) - X(0) \in H$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.23 (☕☕)

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'ordre p et $t \mapsto X(t)$ une solution de l'équation $X' = NX$. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que, pour tout t, $X(t) \in X_0 + \operatorname{Ker} N^{p-1}$.

Inégalités différentielles

Exercice 15.24 (☕☕)

Soit f dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f + f' \leq 1$. Déterminer le meilleur majorant pour $f(1)$.

Exercice 15.25 (☕☕☕)

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $|f| + |1 + f'| \leq 1$.

Exercice 15.26 (☕☕)

Soit a, b des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, y et z des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telles que $y(0) = z(0)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \qquad z'(x) \leq a(x)z(x) + b(x).$$

Montrer que $z(x) \leq y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 15.27 (☕☕)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues telles que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15.28 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues et $A \geq 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. En introduisant la fonction $\varphi : x \mapsto A + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leq A\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 15.29 (☕☕)

Soit E l'espace des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

1. *Montrer que $\|f\| = \|f'' + 2f' + f\|_\infty$ définit une norme sur E.*
2. *Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq C\|f\|$ pour tout $f \in E$.*

16 – Fonctions de plusieurs variables

Régularité

Exercice 16.1 (☕)

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que la fonction f est continue.*
2. *La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?*
3. *La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?*

Exercice 16.2 (☕)

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 y}{\sqrt{x^6+y^4}} & \text{si } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16.3 (☕)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y, \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Supposons la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.*

Calculs de dérivées

Exercice 16.4 (☕)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Calculer $g''(0)$ pour $g : x \mapsto f(0,x) + f(x^2,x)$.

Exercice 16.5 (☕)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes

1. $g_1 : (x,y) \mapsto f(y,x)$,
2. $g_2 : (x,y) \mapsto f(x+y, x-y)$.

Exercice 16.6 (☕)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(x+\lambda,y+\lambda)=f(x,y)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

Exercice 16.7 (☕☕)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$; notons E_n l'espace vectoriel engendré par fonctions $(x,y)\mapsto x^i y^j$ avec i, $i\in\mathbb{N}$ tels que $i+j\le n$ puis T l'application définie par

$$\forall P\in E_n,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad T(P)(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\Big(\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta,\sqrt{x^2+y^2}\sin\theta\Big)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

1. *Montrer que T est un endomorphisme de E_n. Préciser* $\operatorname{Im} T$.
2. *Montrer que $T\circ T=T$.*
3. *Soit Δ l'endomorphisme de E_n défini, pour tout $P\in E_n$, par $\Delta(P)=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$. Déterminer* $\operatorname{Im} T\cap\operatorname{Ker}\Delta$.

Exercice 16.8 (☕☕)

Montrer que $f:(x,y)\mapsto\int_0^\pi \ln(x+y\cos t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>|y|\}$ puis calculer $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 16.9 (☕☕)

Soit $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante.

1. *Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, il existe un unique réel $a(t,x)$ tel que $x=a(t,x)+u(a(t,x))$.*
   On admet que la fonction $(t,x)\mapsto a(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.
2. *Justifier que la fonction $f:(t,x)\mapsto u(a(t,x))$ est continue sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ puis calculer $f(0,x)$ et $\partial_1 f(t,x)+f(t,x)\partial_2 f(t,x)$.*

Recherche d'extrema

Exercice 16.10 (☕)

Chercher les éventuels extrema des fonctions suivantes

1. $f:(x,y)\mapsto \sin x+\sin y-\sin(x+y)$
2. $f:(x,y)\mapsto x^4y^3+\ln(1+y^4)$
3. $f:(x,y)\mapsto x^y-xy$

Exercice 16.11 (☕)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f:(x,y)\mapsto x^2+x^2y+y^3$.

1. *Montrer que f admet un point critique qui n'est pas un extremum local.*
2. *Soit $\mathscr{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\le 1\}$. Déterminer les extrema de f sur $\mathscr{D}$.*

Exercice 16.12 (☕)

Considérons la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f:(x,y)\mapsto(x-y^2)(x-2y^2)$.

1. *Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet un minimum en ce point.*
2. *La fonction f admet-elle un minimum en $(0,0)$?*

Exercice 16.13 (☕☕)

Soit $s>0$. Déterminer les extrema sur $A=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^n x_k=s\right\}$ de la fonction $f:(x_1,\dots,x_n)\mapsto\prod_{k=1}^n x_k$.

Équations aux dérivées partielles

Exercice 16.14 (☕☕)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ engendré par les fonctions $f_{i,j}:(x,y)\mapsto x^i y^j$ où $i,j\in\mathbb{N}$. Considérons l'application linéaire $\Phi:f\mapsto\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ définie sur E.

1. *Montrer que Φ est un endomorphisme de E.*
2. *Montrer que la famille $(f_{i,j})_{i,j}$ est libre.*
3. *Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ puis montrer que $E=\operatorname{Ker}\Phi\oplus F$ avec $F=\{(x,y)\mapsto xyf(x,y),\ f\in E\}$.*

Exercice 16.15 (☕)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

Exercice 16.16 (☕)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
Indication : on pourra poser la fonction $g:(u,v)\mapsto f(u,uv)$.

Exercice 16.17 (☕)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}-xy\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

Indication : on pourra poser la fonction $g:(u,v)\mapsto f(u,ve^{-\frac{u^2}{2}})$.

Exercice 16.18 (☕)

Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{2y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}=-f$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.
Indication : on pourra poser la fonction $g:(u,v)\mapsto f(u,u^2v)$.

Exercice 16.19 (☕☕)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

1. *Montrer que l'application $g:(x,y)\mapsto\int_0^y\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie $\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial y}$.*
2. *Montrer que la fonction $\Phi:r\mapsto\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est de classe $\mathscr{C}^1$ puis calculer sa dérivée.*
3. *En déduire que si f admet un minimum local en $(0,0)$, alors f est localement constante.*

Exercice 16.20 (☕☕)

Trouver les fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^1$ telles qu'il existe $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=2xz,\qquad\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=f(y)g(z),\qquad\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{2}.$$

Exercice 16.21 (☕☕)

1. *Déterminer les fonctions* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *telles que* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+y$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x-y$.
2. *Résoudre l'équation différentielle* $(x-y)y' + x + y = 0$.

Exercice 16.22 (☕☕)

1. *Déterminer les fonctions* $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ *telles que* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\ln x + y - 1}{x^2 y}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\ln x}{xy^2}$.
2. *Résoudre l'équation différentielle* $(x \ln x)y' + (\ln x + y - 1)y = 0$.

Exercice 16.23 (☕☕)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. *Montrer que* f *vérifie la condition*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\{(0,0)\},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$$

si, et seulement si,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.

Surfaces

Exercice 16.24 (☕)

Soit Σ *la surface de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation* $x^2+y^2+z^2 = 1$ *et* $(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$. *Déterminer le plan tangent à* Σ *en* (x_0,y_0,z_0).

Exercice 16.25 (☕)

Soit Σ *la surface de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation* $2x^2+3yz-4z = 1$. *Déterminer les plans tangents à* Σ *contenant la droite d'équations* $y = 2$ *et* $z = 4x$.

Exercice 16.26 (☕)

Soit Σ *la surface de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation* $x^2-y^2-z^2 = 1$. *Déterminer les points de* Σ *d'où le plan tangent est parallèle à la droite d'équations* $y = -2x$ *et* $z = 0$.

Exercice 16.27 (☕)

Soit Σ *la surface de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation* $xyz = 1$ *et* $\mathscr{P}$ *un plan tangent à* Σ *en un point* M *de* Σ. *Notons* A, B, C *ses intersections de* $\mathscr{P}$ *avec les axes* (Ox), (Oy) *et* (Oz). *Montrer que la quantité*

$$\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$$

ne dépend pas du point M.